Ανδρέας Σ. Κουτσογιάννης

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΓΟΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ RAMSEY

Διδακτορική Διατριβή
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Β. Φαρμάκη

Αθήνα, Μάρτιος 2012

to Portgas D. Ace

Heal the world we livin' save it for our children...
...I'm startin' with the man in the mirror.

Michael J. Jackson: 29/08/1958-25/06/2009
Long Live The King

Around here, however, we don't
look backwards for very long.
We keep moving forward, opening up new doors and
doing new things, because we're curious...
and curiosity keeps leading us down new paths.

Walt E. Disney: 05/12/1901-

Courage, don't leave me.

Reinhardt Schneider
Castlevania™, KONAMI®, 1999

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Α. Γιαννόπουλο και κ. Α. Κατάβολο για τις γνώσεις που μου έχουν προσφέρει μέχρι σήμερα, για τις πολλές ώρες που έχουν αφιερώσει σε μένα ως μαθηματικοί στα διάφορα σεμινάρια που διοργάνωσαν τα τελευταία χρόνια όπως και για υποδείξεις τους που με βοήθησαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, αλλά και ως άνθρωποι, ως σύμβουλοι όποτε τους χρειάστικα πραγματικά και για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής μου, όπως επίσης και τους καθηγητές κ. Ν. Παπαναστασίου, κ. Α. Τσαρπαλιά, κ. Γ. Κουμουλή και κ. Ν. Μαχαιρά που μου έκαναν την τιμή να είναι μέλη της επταμελούς επιτροπής μου. Ειδικότερα, ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Ν. Παπαναστασίου ο οποίος τα τελευταία εννέα χρόνια είναι πάντα κοντά μου, πρόθυμος να με βοηθήσει σε οποιοδήποτε θέμα με απασχολεί και που με προσωπική του προσπάθεια πέρασα ένα όμορφο και παραγογικό καλοκαίρι στο Πανεπιστήμιο του Χιούστον.

Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Μ. Παπαδάκη για την υπέροχη συνεργασία που είχαμε στο Πανεπιστήμιο του Χιούστον. Ευχαριστώ τον Γιώργο και τη Σάσσα για τη φιλοξενεία και την ουσιώδη βοήθεια που μου παρείχαν για όλο το διάστημα που ήμουν στο Χιούστον, όπως και όλα τα παιδιά του C.B.L, T.L.C^2 τα οποία με αντιμετώπισαν ως πραγματικό τους φίλο. At this point I want to thank Lauren for being the best roommate I could ever imagine.

Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Σ. Νεγρεπόντη, τον οποίο εκτιμώ αφάνταστα ως άνθρωπο και μαθηματική ευφυία, για την πολύ σημαντική βοήθεια που μου παρέχει τα τελευταία χρόνια. Οι γνώσεις που μου μετέφερε έμμεσα μέσω των βιβλίων του αλλά και άμεσα στις διαλέξεις του περί αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και φιλοσοφίας αποτέλεσαν το μεγαλύτερο τμήμα της μαθηματικής μου διαπαιδαγώγισης.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τα πολύ κοντινά μου πρόσωπα, την οικογένειά μου και κάποιους φίλους μου (Δανάη, Κοσμά, Λευτέρη, Μπομπ, Κλειώ κ.ά) για την σημαντική ψυχολογική στήριξη που μου παρείχαν αδιάκοπα όλα αυτά τα χρόνια και ιδιαίτερα τον τελευταίο χρόνο ο οποίος ήταν αρκετά δύσκολος. Ευχαριστώ τη φίλη και δασκάλα χορού Δανάη αλλά και όλη τη χορευτική μου ομάδα MJC όπως και τη φίλη, δασκάλα χορού και γυμνάστρια Αλέκα και όλη την παρέα του aerobic και του hip-hop που μου έδειναν ενέργεια να συνεχίσω.

Ευχαριστώ το φίλο μου Γιάννη, για τις διορθώσεις που έκανε στο αρχικό κείμενο της παρούσας διατριβής.

Ευχαριστώ τους αμφίβιους καταδρομείς της 2011 Δ1 ΕΣΣΟ του 3ου ΕΤΕΘ Χίου, των οποίων είμαι αρχηγός, για την συμπαράσταση και την πίστη τους σε μένα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την δασκάλα και επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κ. Β. Φαρμάκη. Τα λόγια αλλά και τα μαθηματικά είναι φτωχά

για να αναπαραστίσουν το θαυμασμό αλλά και την ευγνωμοσύνη που αισθάνομαι στο πρόσωπό της. Ως επιβλέπουσα, όχι μόνο είδε αλλά και φούντωσε τη μαθηματική φλόγα που πάντα είχα μέσα μου και με κατεύθυνε σε όμορφα παραγογικά μαθηματικά μονοπάτια. Ως μαθηματικός, έβλεπε πάντα με το έμφυτο ταλέντο της, έστω και αν τα ενδιάμεσα στάδια δεν ήταν πάντα απλά, το επόμενο βήμα αλλά πολλές φορές και τον προορισμό των μαθηματικών προβλημάτων που αντιμετοπίζαμε. Ως άνθρωπος, το σημαντικότερο όλων, ήταν πάντα εκεί, με αστείρευτη ενέργεια, χαμόγελο και θέληση. Οι αποφάσεις της ήταν ένας συνδυασμός λογικής και αισθήματος προστασίας στο πρόσωπό μου και ήταν πάντα για το καλό μου. Το ταξίδι της έρευνας άρχισε μαζί της και όπως μου είπε στα πρώτα μου βήματα, πρέπει να το απολάυσω, έτσι κι εγώ μπορώ να πω με βεβαιότητα ότι παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισα σε προσωπικό επίπεδο, δεν θα μπορούσε το ταξίδι να είναι πιο όμορφο.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε με υποτροφία από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται βασικά θέματα δύο περιοχών των μαθηματικών, της θεωρίας Ramsey και της θεωρίας των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων, αναδεικνύοντας τη μεταξύ τους σχέση.

Ουσιαστικά, η αρχή της θεωρίας Ramsey έγινε με το θεώρημα που απέδειξε ο van der Waerden [vdW] το 1927, σύμφωνα με το οποίο αν διαμερισθεί το σύνολο των φυσικών αριθμών σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε κάποιο από αυτά περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους. Πολύ αργότερα, το 1963, οι Hales-Jewett [HaJ], εισάγοντας την έννοια της λέξης ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο, έδωσαν μια καθαρά συνδυαστική απόδειξη του θεωρήματος του van der Waerden, αποδεικνύοντας ένα διαμεριστικό θεώρημα για λέξεις.

Το όνομα της θεωρίας Ramsey οφείλεται στον F.Ramsey, ο οποίος το 1930 απέδειξε ότι αν τα δισύνολα των φυσικών αριθμών διαμερισθούν σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο των φυσικών αριθμών, ώστε όλα τα δισύνολά του να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης, θεώρημα που βρήκε εφαρμογές στους περισσότερους κλάδους των μαθηματικών. Βασικά, η θεωρία Ramsey αναφέρεται σε αποτελέσματα όπου για δοθείσα πεπερασμένη διαμέριση κάποιας δομής αποδεικνύεται η ύπαρξη μίας ανάλογης υποδομής σε ένα σύνολο της διαμέρισης. Η πρώτη ουσιαστική επέκταση του θεωρήματος του Ramsey, δόθηκε από τον Hindman, 1974 [H] και τους Milliken, 1975 [M] - Taylor, 1976 [T]. Σύμφωνα με το θεώρημα του Hindman, αν οι φυσικοί αριθμοί διαμερισθούν σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο των φυσικών αριθμών του οποίου όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα βρίσκονται στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης. Το ανάλογο αποτέλεσμα για πεπερασμένες διαμερίσεις των δισυνόλων των φυσικών αριθμών, αποδείχθηκε από τους Milliken-Taylor και ουσιαστικά επεκτάθηκε το θεώρημα του Ramsey.

Στη συνέχεια, οι Carlson, 1988 [C] και Furstenberg-Katznelson, 1989 [FuKa] απέδειξαν δαμεριστικά θεωρήματα για λέξεις ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο, ενοποιώντας και ισχυροποιώντας τους δύο κλάδους της θεωρίας Ramsey, δηλαδή τον κλάδο των θεωρημάτων van der Waerden και Hales-Jewett με τον κλάδο των θεωρημάτων Ramsey, Hindman και Milliken-Taylor.

Η έννοια της located λέξης (λέξης με φορέα) ως προς πεπερασμένο αλφάβητο Σ ορίστηκε αυστηρά από τους Bergelson-Blass-Hindman [BBH] ως συνάρτηση από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, ο φορέας της λέξης, στο αλφάβητο Σ. Στη συνέχεια απέδειξαν ένα διαμεριστικό θεώρημα για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο, ένα θεώρημα τύπου Ramsey καθώς και ένα θεώρημα τύπου Nash-Williams [NaWi] για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο.

Στα αποτελέσματα αυτά, απαιτούμε το αλφάβητο Σ να είναι πεπερασμένο καθώς τα συνδυαστικά αυτά αποτελέσματα δεν ισχύουν γενικά αν το Σ υποτεθεί άπειρο αφού στην περίπτωση αυτή θα υπήρχε άπειρη μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος σε κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του συνόλου των φυσικών αριθμών που δεν ισχύει. Στην εργασία του Carlson [C] πρώτη φορά σκιαγραφείται η χαλάρωση της ισχυρής υπόθεσης του πεπερασμένου αλφαβήτου θεωρώντας λέξεις (ω-λέξεις) ως προς άπειρο αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ που φράσονται από ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών ακεραίων. Έτσι, μια ω-λέξη ως προς το Σ που φράσετε από την $\vec{k}$ είναι μια λέξη $w = w_1 \ldots w_l$ στο Σ με $w_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i}\}$ για κάθε $1 \leq i \leq l$. Ομοίως, σύμφωνα με την εργασία της Φαρμάκη [F4], ορίζεται μια located λέξη $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l}$ στο Σ να είναι μια ω-located λέξη στο Σ που φράσεται από την $\vec{k}$ αν $w_{n_i} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\}$ για κάθε $1 \leq i \leq l$. Έτσι, οι λέξεις και οι located λέξεις είναι ω-λέξεις και ω-located λέξεις στην ειδική περίπτωση που η ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.

Ορίζουμε την έννοια της ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξης πάνω από αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ που φράσετε από αμφίπλευρη ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ φυσικών αριθμών, ως located λέξη $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l}$ στο Σ με πεδίο ορισμού $\{n_1 < \ldots < n_l\} \subseteq \mathbb{Z}^*$ ώστε για $1 \leq i \leq l$, $w_{n_i} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\}$ αν $n_i \in \mathbb{N}$ και $w_{n_i} \in \{\alpha_{-k_{n_i}}, \ldots, \alpha_{-1}\}$ αν $-n_i \in \mathbb{N}$. Το έναυσμα για τον ορισμό προήλθε από την αναπαράσταση των ρητών αριθμών από τους T. Budak, N. Işik και J. Pym στην [BIP], σύμφωνα με την οποία κάθε ρητός αριθμός q έχει μοναδική έκφραση ως

$$q = \sum_{s=1}^{\infty} q_{-s} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \; + \; \sum_{r=1}^{\infty} q_r (-1)^{r+1} r!$$

όπου $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq q_{-s} \leq s$ για κάθε $s > 0$, $0 \leq q_r \leq r$ για κάθε $r > 0$ και $q_{-s} = q_r = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα r, s. Έτσι, το σύνολο των μη-μηδενικών ρητών αριθμών μπορεί να ταυτιστεί με κατάλληλο σύνολο ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων. Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσεται μια θεωρία Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις. Ως συνέπεια της θεωρίας Ramsey αυτής, μέσω της προηγούμενης αναπαράστασης των ρητών, μπορούμε να έχουμε τα ανάλογα αποτελέσματα για το σύνολο των ρητών αριθμών.

Η αρχή της θεωρίας των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων γίνεται το 1927, όπου ο Birkhoff αποδεικνύει (στην [Bi]) ότι κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, T), όπου ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση, έχει ένα recurrent στοιχείο, που σημαίνει ότι υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $\alpha_n \to \infty$ τέτοια ώστε $T^{\alpha_n}(x) \to x$. Ο Furstenberg σε συνεργασία με τους Weiss και Katznelson στη δεκαετία του ′70 ([Fu], [FuW], [FuKa]) συνέδεσε θεμελιώδη συνδυαστικά αποτελέσματα, όπως τα διαμεριστικά θεωρήματα των van der Waerden και Hindman, με τη θεωρία των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων και ειδικότερα με φαινόμενα (πολλαπλής) επανεμφάνισης για κατάλληλες ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων ορισμένες από συμπαγή μετρικό χώρο στον εαυτό του. Η πολλαπλή έκδοση του θεωρήματος επανεμφάνησης του Birkhoff είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.0.1. *([FuW], 1978) Αν X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, \ldots, T_l$ είναι συνεχείς απεικονίσεις που μετατίθενται ανά δύο από το X στον εαυτό του, τότε υπάρχουν $x \in X$ και ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $\alpha_n \to \infty$ τέτοια ώστε $T_i^{\alpha_n}(x) \to x$ ταυτόχρονα για $1 \le i \le l$.*

Στην πραγματικότητα, το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί ως η τοπολογική έκφραση του διαμεριστικού θεωρήματος του Gallai ([GRS]), ότι για $l \in \mathbb{N}$ και κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}^l$, κάποιο από τα σύνολα της διαμέρισης περιέχει αφφινικές εικόνες κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου του $\mathbb{N}^l$ το οποίο είναι η πολυδιάστατη επέκταση του θεωρήματος του van der Waerden.

Στο Κεφάλαιο 3 επεκτείνουμε την κλασσική έννοια του τοπολογικού δυναμικού συστήματος, εισάγοντας την έννοια του δυναμικού συστήματος με δείκτες από λέξεις. Κατά συνέπεια αναπτύσσουμε μια θεωρία επανεμφάνισης για τέτοια συστήματα, επεκτείνοντας τα θεμελιώδη αποτελέσματα των Furstenberg και Weiss που αναφέρονται σε δυναμικά συστήματα με δείκτες από φυσικούς αριθμούς ([Fu], [FuW]) που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ακόμα, στο Κεφάλαιο 4, ορίζοντας την έννοια του ρητού δυναμικού συστήματος, παίρνουμε ισχυρότερα αποτελέσματα επανεμφάνισης από αυτά που έπονται από τα γενικότερα αποτελέσματα επανεμφάνισης που αφορούν τοπολογικά δυναμικά συστήματα με δείκτες από λέξεις, παίρνοντας ταυτόχρονα εφαρμογές στην τοπολογία, στη θεωρία αριθμών αλλά και στις διοφαντικές προσεγγίσεις.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 ορίζουμε την έννοια του διαμεριστικού συστήματος. Αποδεικνύουμε διαμεριστικά θεωρήματα για τέτοια συστήματα και βλέπουμε τις εκφράσεις αυτών μέσω της θεωρίας των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων γενικεύοντας τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων. Ως συνέπεια των αποτελεσμάτων αυτών παίρνουμε αποτελέσματα για αυθαίρετες άπειρες ημιομάδες $(X, +)$ με ψηφιακή αναπαράσταση (digital representation) μια οικογένεια $< D_i >_{i \in I}$.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Ramsey για λέξεις που αναπαριστούν ρητούς

Η έννοια της λέξης ως προς πεπερασμένο αλφάβητο εισήχθει στη θεωρία Ramsey από τους Hales-Jewett [HaJ], οι οποίοι έδωσαν μια καθαρά συνδυαστική απόδειξη του θεωρήματος του van der Waerden [vdW] σχετικά με την ύπαρξη αυθαίρετα μεγάλων αριθμητικών προόδων σε ένα από τα σύνολα μιας διαμέρισης σε πεπερασμένο πλήθος συνόλων των φυσικών αριθμών. Ακολούθως, οι λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο, στις εργασίες των Carlson [C] και Furstenberg-Katznelson [FuKa], αποδείχθηκαν ουσιώδες εργαλείο για την ενοποίηση των δύο κύριων κλάδων της θεωρίας Ramsey, αυτού που αφορά το κλασσικό θεώρημα του Ramsey [R] και τις επεκτάσεις του από τους Hindman [H] και Milliken [M]-Taylor [T], και αυτού που αφορά τα θεωρήματα των van der Waerden και Hales-Jewett που μόλις αναφέραμε. Τα εργαλεία αυτά επεκτάθηκαν και ισχυροποιήθηκαν, με τη συστηματική εισαγωγή των Schreier συνόλων από τους Φαρμάκη - Νεγρεπόντη στις [FN1], [FN2].

Η έννοια της **located λέξης** (λέξης με φορέα) ως προς πεπερασμένο αλφάβητο Σ ορίστηκε αυστηρά από τους Bergelson-Blass-Hindman [BBH] ως συνάρτηση από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, ο φορέας της λέξης, στο αλφάβητο Σ. Στη συνέχεια απέδειξαν ένα διαμεριστικό θεώρημα για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο, ένα θεώρημα τύπου Ramsey καθώς και ένα θεώρημα τύπου Nash-Williams [NaWi] για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο.

Στα αποτελέσματα αυτά, το αλφάβητο Σ είναι πεπερασμένο καθώς τα συνδυαστικά αυτά αποτελέσματα δεν ισχύουν αν το Σ υποτεθεί άπειρο, αφού στην περίπτωση αυτή θα υπήρχε άπειρη μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος σε κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του συνόλου των φυσικών αριθμών, γεγονός που δεν ισχύει.

Στην εργασία του Carlson [C] πρώτη φορά παρατηρείτε ότι είναι πιθανή η χαλάρωση της ισχυρής υπόθεσης του πεπερασμένου αλφαβήτου θεωρώντας λέξεις (ω-λέξεις) ως προς άπειρο αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ που όμως φράσονται από μια ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών ακεραίων ($\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$). Έτσι, μια ω-**λέξη** ως προς το Σ που φράσετε από την $\vec{k}$ είναι μια λέξη

$$w = w_1 \ldots w_l \text{ στο } \Sigma \text{ με } w_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i}\} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq l.$$

Ανάλογα, στην εργασία της Φαρμάκη [F4], ορίστηκαν οι ω-**located** λέξεις ως προς ένα άπειρο αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ που φράσονται από την $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως οι located λέξεις $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l}$ στο Σ με $w_{n_i} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\}$ για κάθε $1 \leq i \leq l$. Έτσι, οι λέξεις και οι located λέξεις είναι ω-λέξεις και ω-located λέξεις στην ειδική περίπτωση που η ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε την έννοια της ω-$\mathbb{Z}^*$-**located λέξης** ($\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) πάνω από αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$ που φράσετε από αμφίπλευρη ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ φυσικών αριθμών, ως located λέξη $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l}$ στο Σ με πεδίο ορισμού $\{n_1 < \ldots < n_l\} \subseteq \mathbb{Z}^*$ ώστε για $1 \leq i \leq l$, $w_{n_i} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\}$ αν $n_i \in \mathbb{N}$ και $w_{n_i} \in \{\alpha_{-k_{n_i}}, \ldots, \alpha_{-1}\}$ αν $-n_i \in \mathbb{N}$. Το έναυσμα για τον ορισμό προήλθε από την αναπαράσταση των ρητών αριθμών από τους T. Budak, N. Işik και J. Pym στην [BIP], σύμφωνα με την οποία κάθε ρητός αριθμός q έχει μοναδική έκφραση ως

$$q = \sum_{s=1}^{\infty} q_{-s} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \ + \ \sum_{r=1}^{\infty} q_r (-1)^{r+1} r!$$

όπου $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq q_{-s} \leq s$ για κάθε $s > 0$, $0 \leq q_r \leq r$ για κάθε $r > 0$ και $q_{-s} = q_r = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα r, s. Έτσι, το σύνολο των μη-μηδενικών ρητών αριθμών μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο όλων των ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων πάνω από το αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$, όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$ που κυριαρχούνται από την ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ όπου $k_{-n} = k_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$.

Μπορούμε να έχουμε μια Ramsey θεωρία για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε:

(α) Ένα διαμεριστικό θεώρημα για σταθερές ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις και ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή στο Θεώρημα 2.1.4, παρέχοντας γνήσιες επεκτάσεις των διαμεριστικών θεωρημάτων των Carlson για λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο ([C], Λήμμα 5.9) και για ω-λέξεις ([C], Θεώρημα 15) και των Bergelson-Blass-Hindman ([BBH], Θεώρημα 4.1) για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο, στο Θεώρημα 2.1.2.

(β) Ένα επεκτεταμένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ για πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από σταθερές ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις και ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή στο Θεώρημα 2.2.5). Η διατύπωση του θεωρήματος αυτού γίνεται μέσω των ξ-Schreier ακολουθιών από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ (Ορισμός 2.2.2). Ως συνέπειες του Θεωρήματος 2.2.5 έχουμε τα διαμεριστικά θεωρήματα τύπου Ramsey για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ για ω-located λέξεις και ω-located λέξεις με μεταβλητή που απεδείχθησαν από τη Φαρμάκη στην [F4], επεκτείνοντας τη θεωρία Ramsey του Carlson (δες Πόρισμα 2.2.16) και τα διαμεριστικού τύπου Ramsey θεωρήματα των Bergelson-Blass-Hindman για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο ([BBH], Θεώρημα 5.1) σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό. Επίσης, το Θεώρημα 2.2.5 επεκτείνει το block-Ramsey διαμεριστικό θεώρημα για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό που αποδείχθημε από τους Φαρμάκη - Νεγρεπόντη ([FN1]) και αφορά πεπερασμένα υποσύνολα φυσικών αριθμών.

(γ) Μια ισχυροποίηση του επεκτεταμένου διαμεριστικού θεωρήματος τύπου Ramsey για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό για πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή (Θεώρημα 2.2.5) στην περίπτωση που οι πεπερασμένες ακολουθίες διαμερίζονται από μια οικογένεια $\mathcal{F}$ που είναι δέντρο, παρέχοντας ένα κριτήριο, με τη βοήθεια ενός δείκτη τύπου Cantor-Bendixson της $\mathcal{F}$, στο αν η ξ-ομογενής οικογένεια περιέχεται στην $\mathcal{F}$ ή στο συμπλήρωμά της (στο Θεώρημα 2.3.12). Το Θεώρημα 2.3.12 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ισχυροποιημένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Nash-Williams για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή (δες Θεώρημα 2.3.14).

Ως συνέπεια της θεωρίας Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις που αποδείξαμε και μέσω της αναπαράστασης των ρητών από τους Budak-Işik-Pym στην [BIP] (Θεώρημα 4.2), μπορούμε να έχουμε ανάλογα διαμεριστικά θεωρήματα για το σύνολο των ρητών αριθμών. Έτσι, παρουσιάζουμε, στο Θεώρημα 2.5.2, ένα διαμεριστικό θεώρημα για το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ισχυροποιημένο θεώρημα van der Waerden για τους ρητούς, επίσης ένα διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για τις πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες των ρητών αριθμών για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ (Θεώρημα 2.5.7), ορίζοντας τις ξ-Schreier οικογένειες από ρητούς αριθμούς για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ, και τέλος ένα διαμεριστικό θεώρημα τύπου Nash-Williams για τις άπειρες ακολουθίες των ρητών αριθμών στο Θεώρημα 2.5.14.

Ανάλογα διαμεριστικά αποτελέσματα μπορούν να αποδειχθούν για ημιομάδες που αναπαρήστανται ως ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις. Επίσης, σταθεροποιώντας ακολουθίες σε μια αυθαίρετη ημιομάδα μπορούμε να πάρουμε διαμεριστικά θεωρήματα για μεταθετικές ή μη-μεταθετικές ημιομάδες (Θεωρήματα 2.6.4 και 2.6.3 αντιστοίχως), επεκτείνοντας τα ανάλογα αποτελέσματα των Hindman και Strauss ([HS], Θεωρήματα 14.12, 14.15), καθώς και πολυδιάστατα διαμεριστικά θεωρήματα για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό (Θεώρημα 2.6.9), επεκτείνοντας το διαμεριστικό θεώρημα του Beiglböck ([Be]) για μεταθετικές ημιομάδες που αντιστοιχεί στην περίπτωση των πεπερασμένων διατακτικών (δες Πορίσματα 2.6.11 και 2.6.12), και τέλος διαμεριστικά θεωρήματα τύπου Nash-Williams για άπειρες ακολουθίες σε μια μεταθετική και μη-μεταθετική ημιομάδα (Θεωρήματα 2.6.15 και 2.6.14).

Συμβολισμός 2.0.2. *Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών και $\mathbb{Z}^- = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$. Για ένα μη-κενό σύνολο X συμβολίζουμε με $[X]^{<\omega}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του X και με $[X]^{<\omega}_{>0}$ το σύνολο όλων των μη-κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του X.*

2.1 Διαμεριστικό θεώρημα για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις

Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να αποδειχθεί ένα διαμεριστικό θεώρημα για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις ως προς ένα αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$ που κυριαρχούνται από μια αμφίπλευρη ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ φυσικών αριθμών (Θεωρήματα 2.1.2 και 2.1.4 σε ισχυρότερη μορφή). Τα θεωρήματα αυτά επεκτείνουν ουσιώδη αποτελέσματα για λέξεις με φορέα στο $\mathbb{N}$ όπως τα διαμεριστικά θεωρήματα για ω-λέξεις και λέξεις που αποδεικνύονται στην [C] (Θεώρημα 15 και Λήμμα 5.9) και επίσης το διαμεριστικό θεώρημα για located λέξεις που αποδεικνύεται στην [BBH] (Θεώρημα 4.1).

Ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.2 παίρνουμε ένα ισχυροποιημένο Hales-Jewett θεώρημα για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις στο Πόρισμα 2.1.6 καθώς και ένα ισχυρό διαμεριστικό θεώρημα για το σύνολο των ρητών αριθμών και γενικότερα για μια αυθαίρετη ημιομάδα στο Θεώρημα 2.5.2 και στα Θεωρήματα 2.6.3, 2.6.4 αντιστοίχως.

Ορισμός 2.1.1. *Μια* **ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη** *πάνω στο αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ που κυριαρχείτε από την $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$, με $k_n \in \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$, είναι μια συνάρτηση w από ένα μη-κενό, πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{Z}^*$ στο αλφάβητο Σ τέτοια ώστε $w(n) = w_n \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k_n}\}$ για κάθε $n \in F \cap \mathbb{N}$ και $w_n \in \{\alpha_{-k_n}, \ldots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}\}$ για κάθε $n \in F \cap \mathbb{Z}^-$. Έτσι, το σύνολο $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ όλων των (σταθερών) ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων πάνω από το Σ που κυριαρχούνται από την $\vec{k}$ είναι:*

$$\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}) = \{w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} : l \in \mathbb{N}, n_1 < \ldots < n_l \in \mathbb{Z}^*, \, w_{n_i} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\} \text{ αν } n_i > 0, \, w_{n_i} \in \{\alpha_{-k_{n_i}}, \ldots, \alpha_{-1}\} \text{ αν } n_i < 0, \ 1 \leq i \leq l\}.$$

Έστω $\upsilon \notin \Sigma$ μια οντότητα που καλείται **μεταβλητή**. *Το σύνολο των* **ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων με μεταβλητή** *πάνω από το Σ που κυριαρχούνται από την $\vec{k}$ είναι:*

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{ & w = w_{n_1}\dots w_{n_l} : l\in\mathbb{N}, n_1<\dots<n_l\in\mathbb{Z}^*,\ w_{n_i}\in \\ & \{\upsilon,\alpha_1,\dots,\alpha_{k_{n_i}}\} \textit{ αν } n_i>0,\ w_{n_i}\in\{\upsilon,\alpha_{-k_{n_i}},\dots,\alpha_{-1}\} \\ & \textit{αν } n_i<0,\ 1\le i\le l \textit{ και υπάρχει } 1\le i\le l \textit{ με } w_{n_i}=\upsilon\}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}) = \widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})\cup\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. *Για* $w = w_{n_1}\dots w_{n_l}\in \widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$, *το σύνολο* $dom(w)=\{n_1,\dots,n_l\}$ *είναι το* **πεδίο ορισμού** *της* w. *Έστω* $dom^-(w)=\{n\in dom(w):\ n<0\}$ *και* $dom^+(w)=\{n\in dom(w):\ n>0\}$.

Ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned}&\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : w_{i_1}=\upsilon=w_{i_2} \text{ για } i_1\in dom^-(w),\\ &\qquad i_2\in dom^+(w)\},\\ &\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k}) = \{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k}) : dom^-(w)\neq\emptyset, dom^+(w)\neq\emptyset\}, \text{ και}\\ &\widetilde{L}_0(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}) = \widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k})\cup\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon).\end{aligned}$$

Για $w = w_{n_1}\dots w_{n_r}, u = u_{m_1}\dots u_{m_l}\in\widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$ με $dom(w)\cap dom(u)=\emptyset$ ορίζουμε τη συνέλιξη:

$$w\star u = z_{q_1}\dots z_{q_{r+l}}\in\widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}),$$

όπου $\{q_1<\dots<q_{r+l}\} = dom(w)\cup dom(u)$, $z_i=w_i$ αν $i\in dom(w)$ και $z_i=u_i$ αν $i\in dom(u)$.

Εφοδιάζουμε το σύνολο $\widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$ με μία σχέση $<_{R_1}$ ορίζοντας για $w,u\in\widetilde{L}_0(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$

$$\begin{aligned}w <_{R_1} u \Leftrightarrow dom(u) = A_1\cup A_2 \text{ όπου } A_1,A_2\neq\emptyset \text{ τέτοια ώστε}\\ \max A_1 < \min dom(w)\le\max dom(w) < \min A_2.\end{aligned}$$

Έστω

$$\begin{aligned}\widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} : w_n\in\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \text{ και}\\ w_n <_{R_1} w_{n+1} \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$T_{(p,q)} : \widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}) \longrightarrow \widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$$

για κάθε $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$, ορίζοντας, για $w = w_{n_1}\dots w_{n_l}\in\widetilde{L}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$, $T_{(0,0)}(w)=w$ και, για $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $T_{(p,q)}(w) = u_{n_1}\dots u_{n_l}$, όπου, για $1\le i\le l$
$u_{n_i} = w_{n_i}$ αν $w_{n_i}\in\Sigma$,
$u_{n_i} = \alpha_p$ αν $w_{n_i}=\upsilon$, $n_i\ge 0$ και $p\le k_{n_i}$,
$u_{n_i} = \alpha_{k_{n_i}}$ αν $w_{n_i}=\upsilon$, $n_i\ge 0$ και $p>k_{n_i}$,

$u_{n_i} = \alpha_{-q}$ αν $w_{n_i} = \upsilon$, $n_i < 0$ και $q \leq k_{n_i}$, και
$u_{n_i} = \alpha_{-k_{n_i}}$ αν $w_{n_i} = \upsilon$, $n_i < 0$ και $q > k_{n_i}$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ έχουμε $dom(T_{(p,q)}(w)) = dom(w)$ για $w \in \widetilde{L}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$, $T_{(p,q)}(w) = w$ για $w \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ και $T_{(p,q)}(w \star u) = T_{(p,q)}(w) \star T_{(p,q)}(u)$ για κάθε $w, u \in \widetilde{L}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$ με $dom(w) \cap dom(u) = \emptyset$. Ακόμα, $T_{(p,q)}(\widetilde{L}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})) \subseteq \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Με την προηγούμενη ορολογία μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις.

Θεώρημα 2.1.2 (Διαμεριστικό θεώρημα για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις). *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ ένα αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μια μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$. Αν $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ και $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$ για $r, s \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε ακολουθία $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από μη-κενά, πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και κάθε $w \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ υπάρχει μια ακολουθία $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $w <_{R_1} w_1$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε*

$$T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in A_{i_0},$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(p_i, q_i) \in F_{n_i} \cup \{(0,0)\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $(0,0) \in \{(p_1,q_1), \ldots, (p_\lambda, q_\lambda)\}$, και

$$T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in C_{j_0},$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $(p_i, q_i) \in F_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2 θα εφαρμόσουμε κάποια αποτελέσματα από τη θεωρία των δεξιά συμπαγών ημιομάδων, τα οποία αναφέρουμε παρακάτω.

Δεξιά συμπαγείς ημιομάδες

Μια μη-κενή, **δεξιά συμπαγής ημιομάδα** είναι μια ημιομάδα $(X,+)$, $X \neq \emptyset$ εφοδιασμένη με μια τοπολογία $\mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $(X, \mathfrak{T})$ να είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και οι απεικονίσεις $f_y : X \longrightarrow X$ με $f_y(x) = x + y$ για $x \in X$ είναι συνεχείς για κάθε $y \in X$.

Έστω $(X,+)$ ημιομάδα. Ένα στοιχείο x της X καλείται **ταυτοδύναμο** στην $(X,+)$ αν $x + x = x$. Σύμφωνα με ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα του Ellis, κάθε μη-κενή, δεξιά συμπαγής ημιομάδα περιέχει ταυτοδύναμο στοιχείο. Στο σύνολο των ταυτοδύναμων στοιχείων της $(X,+)$ ορίζεται μια μερική διάταξη $\leq$ σύμφωνα με τον κανόνα

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = x_1.$$

Ένα ταυτοδύναμο στοιχείο x της $(X,+)$ καλείται **ελαχιστικό για τη** X αν κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο x_1 της X που ικανοποιεί τη σχέση $x_1 \leq x$ είναι ίσο με το x. Σύμφωνα με την [FuKa], η $(X,+)$ περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο x ελαχιστικό για την X, και επιπλέον, για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο x_1 της X υπάρχει ταυτοδύναμο στοιχείο x της X που είναι ελαχιστικό για την X και $x \leq x_1$. Κάθε αμφίπλευρο ιδεώδες της X (ένα υποσύνολο I της X καλείται **αμφίπλευρο ιδεώδες** της $(X,+)$ αν $X+I \subseteq I$ και $I+X \subseteq I$) περιέχει όλα τα ελαχιστικά για την X ταυτοδύναμα στοιχεία της X. Το σύνολο όλων των ελαχιστικών ταυτοδύναμων στοιχείων της X συμβολίζεται με $K(X)$.

Υπερφίλτρα

Έστω X ένα μη-κενό σύνολο. Ένα **υπερφίλτρο** στο X είναι ένα μηδέν-ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο μ που ορίζεται σε όλα τα υποσύνολα του X. Το σύνολο όλων των υπερφίλτρων στο X συμβολίζεται με βX. Άρα, $\mu \in \beta X$ αν και μόνο αν

(i) $\mu(A) \in \{0,1\}$ για κάθε $A \subseteq X$, $\mu(X)=1$, και

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ για κάθε $A, B \subseteq X$ με $A \cap B = \emptyset$.

Εύκολα βλέπουμε ότι για $\mu \in \beta X$ αν $\mu(A), \mu(B) = 1$, τότε $\mu(A \cap B) = 1$. Για κάθε $x \in X$ ορίζεται το αντίστοιχο **τετριμμένο υπερφίλτρο** μ_x στο X που αντιστοιχεί ένα $A \subseteq X$ στο $\mu_x(A) = 1$ αν $x \in A$ και $\mu_x(A) = 0$ αν $x \notin A$. Άρα, μ είναι μη-τετριμμένο υπερφίλτρο στο X αν και μόνο αν $\mu(A) = 0$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του X.

Το σύνολο βX γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιαστεί με την τοπολογία $\mathfrak{T}$ η οποία έχει ως βάση την οικογένεια $\{A^* : A \subseteq X\}$, όπου $A^* = \{\mu \in \beta X : \mu(A) = 1\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$ και $(X \setminus A)^* = \beta X \setminus A^*$ για κάθε $A, B \subseteq X$. Πάντα θα θεωρούμε το σύνολο βX εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathfrak{T}$.

Αν $(X,+)$ είναι ημιομάδα, τότε ορίζεται μια πράξη $+$ στο σύνολο βX που αντιστοιχεί σε κάθε $\mu_1, \mu_2 \in \beta X$ το υπερφίλτρο $\mu_1 + \mu_2 \in \beta X$ που δίνεται από τον τύπο

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(\{x \in X : \mu_2(\{y \in X : x+y \in A\}) = 1\}) \text{ για κάθε } A \subseteq X.$$

Με την πράξη αυτή το βX γίνεται ημιομάδα και ισχύει ότι για κάθε $\mu \in \beta X$ η συνάρτηση $f_\mu : \beta X \longrightarrow \beta X$ με $f_\mu(\mu_1) = \mu_1 + \mu$ είναι συνεχής. Άρα, αν $(X,+)$ είναι ημιομάδα, τότε το ζεύγος $(\beta X, +)$ γίνεται δεξιά συμπαγής ημιομάδα.

Για τη συνάρτηση $T : X \longrightarrow Y$ ορίζεται η απεικόνιση

$$\beta T : \beta X \longrightarrow \beta Y \text{ με } \beta T(\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B)) \text{ για } \mu \in \beta X \text{ και } B \subseteq Y,$$

που είναι πάντα συνεχής.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Έστω $X = \widetilde{L}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$. Εφοδιάζουμε το X με πράξη ορίζοντας για $w = w_{n_1} \dots w_{n_r}, u = u_{m_1} \dots u_{m_l} \in X$

$$w + u = z_{q_1} \dots z_{q_s} \in X,$$

όπου $\{q_1, \dots, q_s\} = \{n_1, \dots, n_r\} \cup \{m_1, \dots, m_l\}$, $q_1 < \dots < q_s$ και, για $1 \leq i \leq s$, $z_{q_i} = w_{q_i}$ αν $q_i \notin \{m_1, \dots, m_l\}$, $z_{q_i} = u_{q_i}$ αν $q_i \notin \{n_1, \dots, n_r\}$, $z_{q_i} = \upsilon$ αν είτε $w_{q_i} = \upsilon$ ή $u_{q_i} = \upsilon$, $z_{q_i} = \alpha_{\max\{\mu,\nu\}}$ αν $0 \leq q_i \in \{n_1, \dots, n_r\} \cap \{m_1, \dots, m_l\}$ και $w_{q_i} = \alpha_\mu$, $u_{q_i} = \alpha_\nu$, και $z_{q_i} = \alpha_{\min\{\mu,\nu\}}$ αν $0 > q_i \in \{n_1, \dots, n_r\} \cap \{m_1, \dots, m_l\}$ και $w_{q_i} = \alpha_\mu$, $u_{q_i} = \alpha_\nu$.
Παρατηρούμε ότι $(X, +)$ είναι ημιομάδα, $C = \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ είναι μη-κενή υποημιομάδα της $(X, +)$ και $V_0 = \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της $(X, +)$. Ακόμα, $w + u = w \star u$ για $w, u \in X$ με $w <_{R_1} u$.

$(X, +)$ ημιομάδα, άρα η $(\beta X, +)$ έχει δομή δεξιά συμπαγούς ημιομάδας όπως περιγράψαμε παραπάνω. Για κάθε $A \subseteq X$ και $w \in X$ θέτουμε

$$A_w = \{u \in A : \ w <_{R_1} u\} \quad \text{και} \quad \theta A = \bigcap \{(A_w)^* : w \in X\},$$

όπου $(A_w)^* = \{\mu \in \beta X : \mu(A_w) = 1\}$.

Ισχυρισμός 1 Οι $\theta X, \theta C$ και θV_0 είναι μη-κενές δεξιά συμπαγείς υποημιομάδες της βX που αποτελούνται από μη-τετριμμένα υπερφίλτρα του X.

Πράγματι, έστω $A \in \{X, C, V_0\}$. Για κάθε $w \in X$ το σύνολο $(A_w)^* = \beta X \setminus (X \setminus A_w)^*$ είναι συμπαγές υποσύνολο του βX , άρα το θA είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του βX. Για κάθε $w \in X$ έχουμε $A_w \neq \emptyset$ και συνεπώς $(A_w)^* \neq \emptyset$. Καθώς η οικογένεια $\{(A_w)^* : \ w \in X\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, έχουμε $\theta A \neq \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν $w <_{R_1} y$ και $w + y <_{R_1} z$, τότε $w <_{R_1} y + z$, μπορεί να αποδειχθεί ότι $(\theta A, +)$ είναι ημιομάδα. Πράγματι, για $\mu_1, \mu_2 \in \theta A$ και $w \in X$, έχουμε ότι
$(\mu_1 + \mu_2)(A_w) = \mu_1(\{u_1 \in A_w : \mu_2(\{u_2 \in A_{w+u_1} : u_1 + u_2 \in A_w\}) = 1\}) = \mu_1(\{u_1 \in A_w : \mu_2(A_{w+u_1}) = 1\}) = \mu_1(A_w) = 1$.
Άρα, θA είναι μια μη-κενή δεξιά συμπαγής υποημιομάδα της βX και αποτελείται από μη-τετριμμένα υπερφίλτρα του X, καθώς $\mu_w \notin (A_w)^*$ για κάθε $w \in X$.

Επίσης, το $\theta V_0 \subseteq \theta X$ είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της θX. Πράγματι, για $\mu_1 \in \theta V_0$, $\mu_2 \in \theta X$ και $w \in X$, έχουμε
$(\mu_1 + \mu_2)((V_0)_w) = \mu_1(\{u_1 \in (V_0)_w : \mu_2(\{u_2 \in X_{w+u_1} : u_1 + u_2 \in (V_0)_w\}) = 1\}) = \mu_1(\{u_1 \in (V_0)_w : \mu_2(X_{w+u_1}) = 1\}) = \mu_1((V_0)_w) = 1 = (\mu_2 + \mu_1)((V_0)_w)$.

Έστω $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και έστω συνάρτηση $\beta T_{(p,q)} : \beta X \longrightarrow \beta X$ με $\beta T_{(p,q)}(\mu)(A) = \mu((T_{(p,q)})^{-1}(A))$ για κάθε $\mu \in \beta X$ και $A \subseteq X$. Παρατηρούμε ότι:

i) $\beta T_{(p,q)}(\mu) = \mu$ για κάθε $\mu \in \theta C$, καθώς $T_{(p,q)}(w) = w$ για κάθε $w \in C$.

ii) $\beta T_{(p,q)}(\theta X) \subseteq \theta C$, καθώς για $\mu \in \theta X$ και $w \in X$ έχουμε $\beta T_{(p,q)}(\mu)(C_w) = \mu(\{u \in X_w : T_{(p,q)}(u) \in C_w\}) = \mu(X_w) = 1$,

iii) ο περιορισμός $\beta T_{(p,q)}|_{\theta X}$ είναι ομομορφισμός, καθώς για $\mu_1, \mu_2 \in \theta X$ και $A \subseteq X$ ισχύει
$\beta T_{(p,q)}(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(\{u_1 \in X : \mu_2(\{u_2 \in X_{u_1} : T_{(p,q)}(u_1 + u_2) \in A\}) = 1\}) = \mu_1(\{u_1 \in X : \mu_2(\{u_2 \in X_{u_1} : T_{(p,q)}(u_1) + T_{(p,q)}(u_2) \in A\}) = 1\}) = (\beta T_{(p,q)}(\mu_1) + \beta T_{(p,q)}(\mu_2))(A)$.

Σύμφωνα με τους [FuKa], υπάρχει ένα ταυτοδύναμο μ_1 στη μη-κενή, δεξιά συμπαγή ημιομάδα θC ελαχιστικό για την θC. Καθώς θV_0 είναι αμφίπλευρο ιδεώδες για τη δεξιά συμπαγή ημιομάδα θX και $\mu_1 \in \theta C \subseteq \theta X$ είναι ταυτοδύναμο στοιχείο της θX υπάρχει ταυτοδύναμο $\mu \in \theta V_0 \subseteq \beta X$ ελαχιστικό στην θX με $\mu \leq \mu_1$. Επειδή για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ο περιορισμός της $\beta T_{(p,q)}$ στο θX είναι ομομορφισμός, έχουμε ότι $\beta T_{(p,q)}(\mu) \leq \beta T_{(p,q)}(\mu_1)$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αλλά $\beta T_{(p,q)}(\mu_1) = \mu_1$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, διότι $\mu_1 \in \theta C$, συνεπώς, $\beta T_{(p,q)}(\mu) \leq \mu_1$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Καθώς μ_1 είναι ελαχιστικό για την θC και $\beta T_{(p,q)}(\mu) \in \theta C$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, έχουμε $\beta T_{(p,q)}(\mu) = \mu_1$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχουν μη-τετριμμένα υπερφίλτρα $\mu \in \theta V_0 \subseteq \theta X \subseteq \beta X$ και $\mu_1 \in \theta C \subseteq \theta X \subseteq \beta X$ τέτοια ώστε:

(1) $\mu + \mu = \mu$, $\mu_1 + \mu_1 = \mu_1$,
(2) $\mu_1 = \beta T_{(p,q)}(\mu)$ για κάθε $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, και
(3) $\mu + \mu_1 = \mu_1 + \mu = \mu$.

Ισχυρισμός 2 Για κάθε $w \in V_0$, $B \subseteq V_0$ με $\mu(B) = 1$, $D \subseteq C$ με $\mu_1(D) = 1$ και F μη-κενό, πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ υπάρχει $w_0 \in V_0$, $w <_{R_1} w_0$, $B_1 \subseteq B \subseteq V_0$ και $D_1 \subseteq D \subseteq C$ με $\mu(B_1) = 1$, $\mu_1(D_1) = 1$ τέτοια ώστε:

$w_0 \in B$, $w <_{R_1} w_0$, $T_{(p,q)}(w_0) \in D$ για κάθε $(p,q) \in F$,

$B_1 = \{u \in B_{w_0} : w_0 + u \in B$ και $T_{(p,q)}(w_0) + u \in B$ για κάθε $(p,q) \in F\}$,
και

$D_1 = \{z \in D_{w_0} : w_0 + z \in B$ και $T_{(p,q)}(w_0) + z \in D$ για κάθε $(p,q) \in F\}$.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 έπεται από τις ιδιότητες (1), (2) και (3) των υπερφίλτρων $\mu \in \theta V_0 \subseteq \beta X$ και $\mu_1 \in \theta C \subseteq \beta X$. Πράγματι, καθώς $\mu_1 = \beta T_{(p,q)}(\mu) = \beta T_{(p,q)}(\mu) + \mu_1$ και $\mu = \mu + \mu = \beta T_{(p,q)}(\mu) + \mu = \mu + \mu_1$ για κάθε $(p,q) \in F$, έχουμε ότι:
$1 = \mu_1(D) = \mu(\{w_0 \in B_w : T(p,q)(w_0) \in D$ για κάθε $(p,q) \in F\}) = \mu(\{w_0 \in B_w : \mu_1(\{z \in D_{w_0} : T(p,q)(w_0) + z \in D$ για κάθε $(p,q) \in F\}) = 1\})$, και
$1 = \mu(B) = \mu(\{w_0 \in B_w : \mu(\{u \in B_{w_0} : w_0 + u \in B\}) = 1\})=$

$= \mu(\{w_0 \in B_w : \mu(\{u \in B_{w_0} : T_(p,q)(w_0) + u \in B$ για κάθε $(p,q) \in F\}) = 1\}) = \mu(\{w_0 \in B_w : \mu_1(\{z \in D_{w_0} : w_0 + z \in B\}) = 1\})$.

Θα κατασκευάσουμε, με επαγωγή στο n, τη ζητούμενη ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_0$. Καθώς, $V = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ και $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $\mu(A_{i_0}) = 1$ και $\mu_1(C_{j_0}) = 1$. Έστω $w \in V_0$. Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2, ξεκινώντας με $w \in V_0$, $B_1 = A_{i_0} \cap V_0$ και $D_1 = C_{j_0}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία $w <_{R_1} w_1 <_{R_1} w_2 <_{R_1} \ldots$ στο V_0 και δύο φθίνουσες ακολουθίες $V_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, και $C \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \ldots$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύουν:
$\mu(B_n) = 1$ και $\mu_1(D_n) = 1$, $w_n \in B_n$ και $T_{(p,q)}(w_n) \in D_n$ για κάθε $(p,q) \in F_n$,
$B_{n+1} = \{u \in (B_n)_{w_n} : w_n + u \in B_n$ και $T_{(p,q)}(w_n) + u \in B_n$ για κάθε $(p,q) \in F_n\}$, και
$D_{n+1} = \{z \in (D_n)_{w_n} : w_n + z \in B_n$ και $T_{(p,q)}(w_n) + z \in D_n$ για κάθε $(p,q) \in F_n\}$.

Η ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Θα αποδείξουμε, με επαγωγή στο λ ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in B_{n_1} \subseteq B_1 \subseteq A_{i_0},$$

για κάθε $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(p_i, q_i) \in F_{n_i} \cup \{(0,0)\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $(0,0) \in \{(p_1,q_1), \ldots, (p_\lambda, q_\lambda)\}$, και ότι

$$T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in D_{n_1} \subseteq D_1 = C_{j_0},$$

για κάθε $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(p_i, q_i) \in F_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.

Πράγματι, για $n_1 \in \mathbb{N}$ και $(p_1, q_1) \in F_{n_1}$, έχουμε $w_{n_1} \in B_{n_1}$ και $T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \in D_{n_1}$. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\lambda \geq 1$ και έστω $n_1 < \ldots < n_\lambda < n_{\lambda+1} \in \mathbb{N}$ και $(p_i, q_i) \in F_{n_i} \cup \{(0,0)\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda + 1$.
Περίπτωση 1 Έστω $(0,0) \in \{(p_2,q_2), \ldots, (p_{\lambda+1}, q_{\lambda+1})\}$.
Τότε $u = T_{(p_2,q_2)}(w_{n_2}) \star \ldots \star T_{(p_{\lambda+1},q_{\lambda+1})}(w_{n_{\lambda+1}}) \in B_{n_2} \subseteq B_{n_1+1}$ σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση. Άρα,
$T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) + u = T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_{\lambda+1},q_{\lambda+1})}(w_{n_{\lambda+1}}) \in B_{n_1}$.
Περίπτωση 2 Έστω $(0,0) \notin \{(p_2,q_2), \ldots, (p_{\lambda+1}, q_{\lambda+1})\}$.
Τότε $z = T_{(p_2,q_2)}(w_{n_2}) \star \ldots \star T_{(p_{\lambda+1},q_{\lambda+1})}(w_{n_{\lambda+1}}) \in D_{n_2} \subseteq D_{n_1+1}$ σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση.

Αν $(p_1, q_1) = (0,0)$, τότε
$w_{n_1} + z = T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_{\lambda+1},q_{\lambda+1})}(w_{n_{\lambda+1}}) \in B_{n_1}$.

Αν $(p_1, q_1) \in F_{n_1}$, τότε
$T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) + z = T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_{\lambda+1},q_{\lambda+1})}(w_{n_{\lambda+1}}) \in D_{n_1}$.
Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θα αποδείξουμε τώρα μια ισχυρότερη έκδοση του Θεωρήματος 2.1.2, χρησιμοποιώντας την έννοια των extracted ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων μιας δοσμένης διατεταγμένης ακολουθίας από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή και ένα θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 2.1.2 για ω-located λέξεις στο $\mathbb{N}$ το οποίο αποδείχθει στην [F4] (Θεώρημα 1.1). Ξεκινάμε με τους απαραίτητους ορισμούς και συμβολισμούς.

Extracted ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις, Extractions

Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ ένα αλφάβητο, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες και $\upsilon \notin \Sigma$. Έστω μια ακολουθία $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Μια **extracted ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη με μεταβλητή** της $\vec{w}$ είναι μία ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη με μεταβλητή $u \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ τέτοια ώστε

$$u = T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(p_i, q_i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0 \leq p_i \leq k_{n_i}$, $0 \leq q_i \leq k_{-n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $(0,0) \in \{(p_1,q_1), \ldots, (p_\lambda, q_\lambda)\}$. Το σύνολο όλων των extracted ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων με μεταβλητή της $\vec{w}$ συμβολίζεται με $\widetilde{EV}(\vec{w})$.

Μια **extracted ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη** της $\vec{w}$ είναι μία ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη $z \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ με

$$z = T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $(p_i, q_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $1 \leq p_i \leq k_{n_i}$, $1 \leq q_i \leq k_{-n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$. Το σύνολο όλων των extracted ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων της $\vec{w}$ συμβολίζεται με $\widetilde{E}(\vec{w})$. Έστω

$\widetilde{EV}^\infty(\vec{w}) = \{\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : u_n \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\vec{u} \in \widetilde{EV}^\infty(\vec{w})$, τότε λέμε ότι η $\vec{u}$ είναι μία **extraction** της $\vec{w}$ και γράφουμε $\vec{u} \prec \vec{w}$. Παρατηρούμε ότι για $\vec{u}, \vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ έχουμε $\vec{u} \prec \vec{w}$ αν και μόνο αν $\widetilde{EV}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{EV}(\vec{w})$.

Μια ω-located λέξη είναι μια ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Έτσι, για ένα αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, μια αύξουσα ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ και $\upsilon \notin \Sigma$ τα σύνολα των **ω-located λέξεων** πάνω από το Σ που κυριαρχούνται από την $\vec{k}$ είναι

$$L(\Sigma, \vec{k}) = \{w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} : l \in \mathbb{N}, n_1 < \ldots < n_l \in \mathbb{N},\ w_{n_i} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq l\},$$

$$L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = \{w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} : l \in \mathbb{N}, n_1 < \ldots < n_l \in \mathbb{N}, w_{n_i} \in \{\upsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{n_i}}\} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq l \text{ και υπάρχει } 1 \leq i \leq l \text{ με } w_{n_i} = \upsilon\}, \text{ και}$$

$$L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}) = L(\Sigma, \vec{k}) \cup L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon).$$

Για $w, u \in L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$ γράφουμε

$$w <_{R_2} u \iff \max dom(w) < \min dom(u).$$

Έστω

$$L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = \{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : w_n <_{R_2} w_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Για κάθε $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ορίζονται συναρτήσεις

$$T_p : L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}) \longrightarrow L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$$

θέτοντας για $w = w_{n_1} \dots w_{n_l} \in L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$: $T_0(w) = w$ και, για $p \in \mathbb{N}$, $T_p(w) = u_{n_1} \dots u_{n_l}$, όπου, για $1 \le i \le l$, $u_{n_i} = w_{n_i}$ αν $w_{n_i} \in \Sigma$, $u_{n_i} = \alpha_p$ αν $w_{n_i} = \upsilon$ και $k_{n_i} \ge p$ και τέλος $u_{n_i} = \alpha_{k_{n_i}}$ αν $w_{n_i} = \upsilon$ και $k_{n_i} < p$.
Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Το σύνολο $EV(\vec{w})$ όλων των extracted ω-located λέξεων με μεταβλητή της $\vec{w}$ αποτελείται από τις λέξεις της μορφής

$$T_{p_1}(w_{n_1}) \star \dots \star T_{p_\lambda}(w_{n_\lambda}),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \dots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $p_1, \dots, p_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοια ώστε $0 \le p_i \le k_{n_i}$ για κάθε $1 \le i \le \lambda$ και $0 \in \{p_1, \dots, p_\lambda\}$, και το σύνολο $E(\vec{w})$ όλων των extracted ω-located λέξεων της $\vec{w}$ αποτελείται από λέξεις της μορφής $T_{p_1}(w_{n_1}) \star \dots \star T_{p_\lambda}(w_{n_\lambda})$, όπου $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \dots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $p_1, \dots, p_\lambda \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $1 \le p_i \le k_{n_i}$ για κάθε $1 \le i \le \lambda$. Έστω

$EV^\infty(\vec{w}) = \{\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : u_n \in EV(\vec{w}) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$.
Αν $\vec{u} \in EV^\infty(\vec{w})$, τότε λέμε ότι η $\vec{u}$ είναι μία **extraction** της $\vec{w}$ και γράφουμε $\vec{u} \prec \vec{w}$. Παρατηρούμε ότι για $\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ έχουμε $\vec{u} \prec \vec{w}$ αν και μόνο αν $EV(\vec{u}) \subseteq EV(\vec{w})$.

Ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.2 μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.1.3 (Διαμεριστικό θεώρημα για ω-located λέξεις ([F4]))**.** *Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ ένα άπειρο αριθμήσιμο αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και $r, s \in \mathbb{N}$. Αν $L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = A_1 \cup \dots \cup A_r$ και $L(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \dots \cup C_s$, τότε υπάρχει ακολουθία $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $1 \le i_0 \le r$, $1 \le j_0 \le s$ τέτοια ώστε*

$$EV(\vec{w}) \in A_{i_0} \text{ και } E(\vec{w}) \in C_{j_0}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\widetilde{\Sigma} = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ και $\vec{k}_* = (\widetilde{k}_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$, όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n$ και $\widetilde{k}_{-n} = \widetilde{k}_n = k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varphi : \widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma} \cup \{\upsilon\}, \vec{k}_*) \to L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$ με

$$\varphi(w_{n_1} \dots w_{n_l}) = w_{n_{i_0}} \dots w_{n_l}, \text{ όπου } n_{i_0} = \min dom^+(w_{n_1} \dots w_{n_l}).$$

Έχουμε ότι $\varphi(\widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma},\vec{k}_*)) = L(\Sigma,\vec{k})$ και $\varphi(\widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma},\vec{k}_*;\upsilon)) = L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$, έτσι $\widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma},\vec{k}_*;\upsilon) = \bigcup_{i=1}^r \varphi^{-1}(A_i)$ και $\widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma},\vec{k}_*) = \bigcup_{j=1}^s \varphi^{-1}(C_j)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.2, υπάρχουν $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma},\vec{k}_*;\upsilon)$ με $\widetilde{w}_n <_{R_1} \widetilde{w}_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq i_0 \leq r, 1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $T_{(p_1,q_1)}(\widetilde{w}_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(\widetilde{w}_{n_\lambda}) \in \varphi^{-1}(A_{i_0})$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(p_i,q_i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0 \leq p_i, q_i \leq k_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $(0,0) \in \{(p_1,q_1),\ldots,(p_\lambda,q_\lambda)\}$, και $T_{(p_1,q_1)}(\widetilde{w}_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(\widetilde{w}_{n_\lambda}) \in \varphi^{-1}(C_{j_0})$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(p_i,q_i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq p_i, q_i \leq k_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.

Θέτουμε $w_n = \varphi(\widetilde{w}_n) \in L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $w_n <_{R_2} w_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς $\widetilde{w}_n <_{R_1} \widetilde{w}_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπώς $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. Η ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα, καθώς $T_p(w_n) = \varphi(T_{(p,p)}(\widetilde{w}_n))$ για $0 \leq p \leq k_n$. □

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε μια ισχυροποιημένη μορφή του Θεωρήματος 2.1.2 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.3.

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ ένα αλφάβητο, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\upsilon \notin \Sigma$ και έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$, $r,s \in \mathbb{N}$. Αν $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ και $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, τότε υπάρχει μια extraction $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{w}$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε*

$$\widetilde{EV}(\vec{u}) \subseteq A_{i_0} \text{ και } \widetilde{E}(\vec{u}) \subseteq C_{j_0}.$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε μια καλή διάταξη $\leq_*$ στο σύνολο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Για $q \in \mathbb{N}$ θέτουμε $i(q) = 1$ αν $q \leq k_{-1}$ και $i(q) = n+1$ αν $k_{-n} < q \leq k_{-n+1}$ για $n \geq 2$. Έστω $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Γράφουμε $(p_1,q_1) \leq_* (p_2,q_2)$ στην περίπτωση που (1) $i(q_1) < i(q_2)$ ή (2) $i(q_1) = i(q_2)$ και $p_1 < p_2$ ή (3) $i(q_1) = i(q_2)$ και $p_1 = p_2$ και $q_1 \leq q_2$. Έστω $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{\beta_1 <_* \beta_2 <_* \beta_3 <_* \ldots\}$ και αύξουσα ακολουθία $\vec{l} = (l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\beta_{l_n} = (k_n, k_{-n})$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : L(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{\upsilon\},\vec{l}\,) \to \widetilde{EV}(\vec{w}) \cup \widetilde{E}(\vec{w})$ η οποία στέλνει το στοιχείο $t_{n_1}\ldots t_{n_\lambda} \in L(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{\upsilon\},\vec{l}\,)$ στο

$$\phi(t_{n_1}\ldots t_{n_\lambda}) = T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}),$$

όπου για $1 \leq i \leq \lambda$, $(p_i,q_i) = (0,0)$ αν $t_{n_i} = \upsilon$ και $(p_i,q_i) = (\mu_1,\mu_2)$ αν $t_{n_i} = \beta_\mu = (\mu_1,\mu_2)$. Η συνάρτηση ϕ είναι 1-1 και επί του $\widetilde{EV}(\vec{w}) \cup \widetilde{E}(\vec{w})$. Ακόμα, $\phi(L(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\vec{l};\upsilon)) = \widetilde{EV}(\vec{w})$ και $\phi(L(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\vec{l}\,)) = \widetilde{E}(\vec{w})$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.3, υπάρχει ακολουθία $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\vec{l};\upsilon)$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $EV(\vec{s}) \subseteq \phi^{-1}(A_{i_0})$ και $E(\vec{s}) \subseteq \phi^{-1}(C_{j_0})$. Θέτουμε $u_n = \phi(s_n) \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Τότε η $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια extraction της $\vec{w}$ και $\widetilde{EV}(\vec{u}) \subseteq \phi(EV(\vec{s})) \subseteq A_{i_0}$ και $\widetilde{E}(\vec{u}) \subseteq \phi(E(\vec{s})) \subseteq C_{j_0}$. □

Θα αποδείξουμε τώρα μια πεπερασμένη μορφή του Θεωρήματος 2.1.4, που μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ισχυροποιημένο θεώρημα Hales-Jewett. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ορολογία.

Συμβολισμός 2.1.5. *Συμβολίζουμε με $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k},n)$ το σύνολο όλων των (σταθερών) ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων ως προς το Σ που κυριαρχούντε από την $\vec{k}$ με μήκος $n\in\mathbb{N}$, και αν $\upsilon\notin\Sigma$ είναι μια μεταβλητή, συμβολίζουμε με $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon,n)$ το σύνολο των ω-$\mathbb{Z}^*$-located με μεταβλητή ως προς το Σ που κυριαρχούντε από την $\vec{k}$ με μήκος $n\in\mathbb{N}$. Έτσι, αν $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του πεπερασμένου συνόλου A, τότε,*

$\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k},n) = \{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k}) : |dom(w)| = n\}$, *και*

$\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon,n) = \{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : |dom(w)| = n\}$.

Πόρισμα 2.1.6. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n\in\mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon\notin\Sigma$ μεταβλητή, $r,m\in\mathbb{N}$, $n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}\subseteq\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Τότε, υπάρχει $n_0\equiv n_0(r,m,n_1,\ldots,n_m,\vec{k})\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k},n_0) = C_1\cup\ldots\cup C_r$, να υπάρχουν $t_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} t_m \in \widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ με $t_1\star\ldots\star t_m\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon,n_0)$ τέτοια ώστε για κάποιο $1\le i_0\le r$ να ικανοποιούν*

$$T_{(p_1,q_1)}(t_1)\star\ldots\star T_{(p_m,q_m)}(t_m)\in C_{i_0}$$

για κάθε $1\le p_i\le k_{n_i}$, $1\le q_i\le k_{-n_i}$ για $1\le i\le m$.

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι υπάρχει διαμέριση $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k},n) = C_1^n\cup\ldots\cup C_r^n$, τέτοια ώστε για κάθε $t_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} t_m\in\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ με $t_1\star\ldots\star t_m\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon,n)$ το συμπέρασμα να μην ισχύει. Για $1\le i\le r$ έστω $B_i = \cup_{n\in\mathbb{N}}C_i^n$. Τότε $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k}) = B_1\cup\ldots\cup B_r$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.2 υπάρχουν $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ και $1\le i_0\le r$ τέτοια ώστε $T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1})\star\ldots\star T_{(p_m,q_m)}(w_{n_m})\in B_{i_0}$ για κάθε $1\le p_i\le k_{n_i}$, $1\le q_i\le k_{-n_i}$ για $1\le i\le m$. Αν $|dom(w_{n_1}\star\ldots\star w_{n_m})| = n$, τότε $T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1})\star\ldots\star T_{(p_m,q_m)}(w_{n_m})\in C_{i_0}^n$ για κάθε $1\le p_i\le k_{n_i}$, $1\le q_i\le k_{-n_i}$ για $1\le i\le m$, αντίφαση. □

2.2 Επεκτεταμένα θεωρήματα τύπου Ramsey για πεπερασμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το Θεώρημα 2.2.5, στο οποίο αποδεικνύουμε ένα επεκτεταμένο, σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό, διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις και ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή πάνω από ένα αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, που κυριαρχούνται από μια ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$. Το Θεώρημα 2.2.5 είναι επέκταση σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό του Θεωρήματος 2.1.4, το οποίο αντιστοιχεί στην περίπτωση $\xi = 1$. Για την απόδειξη του αποτελέσματος αυτού θα εφαρμόσουμε κάποιες τεχνικές από τις εργασίες [FN2] και [F4].

Ως συνέπειες του Θεωρήματος 2.2.5 παίρνουμε ένα επεκτεταμένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό για ω-located λέξεις (δες Πόρισμα 2.2.16) και συνεπώς για located λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο.

Το μέσο για την απόδειξη αυτού του επεκτεταμένου διαμεριστικού θεωρήματος τύπου Ramsey (Θεώρημα 2.2.5) είναι τα συστήματα Schreier $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}))_{\xi<\omega_1}$ και $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_{\xi<\omega_1}$ (Ορισμός 2.2.2), που αποτελείται από οικογένειες πεπερασμένων διατεταγμένων ακολουθιών (σταθερών και με μεταβλητή) ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων πάνω από το αλφάβητο Σ που κυριαρχούνται από την ακολουθία $\vec{k}$. Ουσιώδη ρόλο για τον ορισμό αυτό έχουν τα σύνολα Schreier $\mathcal{A}_\xi$, που αποτελούνται από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, τα οποία ορίζονται παρακάτω, χρησιμοποιώντας (στην περίπτωση 3(iii)) την κανονική μορφή Cantor των διατακτικών αριθμών (βλέπε [KM], [L]). Τα σύνολα Schreier έχουν μελετηθεί συστηματικά στις εργασίες [F1] και [F3].

Για $s_1, s_2 \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ γράφουμε

$$s_1 < s_2 \iff \max s_1 < \min s_2.$$

Ορισμός 2.2.1 (Το σύστημα Schreier, [F1, Ορ. 7], [F2, Ορ. 1.5] [F3, Ορ. 1.4]). *Για κάθε μη-μηδενικό, αριθμήσιμο, οριακό διατακτικό λ επιλέγουμε και σταθεροποιούμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από επόμενους διατακτικούς αριθμούς μικρότερους από λ με $\sup_n \lambda_n = \lambda$. Το σύστημα $(\mathcal{A}_\xi)_{\xi<\omega_1}$ ορίζεται αναδρομικά ακολούθως:*

(1) $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$ *και* $\mathcal{A}_1 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$,

(2) $\mathcal{A}_{\zeta+1} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0} : s = \{n\} \cup s_1,$ *όπου* $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} < s_1$ *και* $s_1 \in \mathcal{A}_\zeta\}$,

(3i) $\mathcal{A}_{\omega^{\beta+1}} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0} : s = \bigcup_{i=1}^n s_i,$ *όπου* $n = \min s_1$, $s_1 < \ldots < s_n$ *και* $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{A}_{\omega^\beta}\}$,

(3ii) *για κάθε μη-μηδενικό, αριθμήσιμο οριακό διατακτικό* λ,
$\mathcal{A}_{\omega^\lambda} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0} : s \in \mathcal{A}_{\omega^{\lambda_n}}$ *με* $n = \min s\}$, *και*

(3iii) *για οριακό διατακτικό αριθμό* ξ *τέτοιο ώστε* $\omega^\alpha < \xi < \omega^{\alpha+1}$ *για κάποιο* $0 < \alpha < \omega_1$, *αν*
$\xi = \omega^\alpha p + \sum_{i=1}^m \omega^{a_i} p_i$, *όπου* $m \in \mathbb{N}$ *με* $m \geq 0$, $p, p_1, \ldots, p_m$ *είναι φυσικοί αριθμοί με* $p, p_1, \ldots, p_m \geq 1$ *(έτσι ώστε είτε* $p > 1$, *ή* $p = 1$ *και* $m \geq 1$*)*

και $a, a_1, \ldots, a_m$ *είναι διατακτικοί με* $a > a_1 > \ldots a_m > 0$,
$\mathcal{A}_\xi = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0} : s = s_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{m} s_i)$ *με* $s_m < \ldots < s_1 < s_0$, $s_0 = s_1^0 \cup \ldots \cup s_p^0$ *με* $s_1^0 < \ldots < s_p^0 \in \mathcal{A}_{\omega^a}$, *και* $s_i = s_1^i \cup \ldots \cup s_{p_i}^i$ *με* $s_1^i < \ldots < s_{p_i}^i \in \mathcal{A}_{\omega^{a_i}}$ *για κάθε* $1 \leq i \leq m\}$.

Έστω $\Sigma = \{\alpha_n \ : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$ ένα αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ αμφίπλευρη ακολουθία φυσικών αριθμών. Ορίζουμε τις **πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις** πάνω από το Σ που κυριαρχούνται από την $\vec{k}$ ως εξής:
$\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) = \{\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_l) : l \in \mathbb{N},\ w_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} w_l \in \widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k})\} \cup \{\emptyset\}$, και
$\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_l) : l \in \mathbb{N}, w_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} w_l \in \widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\} \cup \{\emptyset\}$.

Τέλος, θέτουμε $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k}) = \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) \cup \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$.

Θα ορίσουμε τώρα τα συστήματα Schreier $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}))_{\xi<\omega_1}$ και $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_{\xi<\omega_1}$.

Ορισμός 2.2.2 (Τα συστήματα Schreier $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}))_{\xi<\omega_1}$ και $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_{\xi<\omega_1}$)**.** *Έστω* $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ *αλφάβητο,* $\upsilon \notin \Sigma$ *μεταβλητή και* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$.
Θέτουμε:
$\widetilde{L}^0(\Sigma,\vec{k}) = \{\emptyset\} = \widetilde{L}^0(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$, *και για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό* $\xi \geq 1$,
$\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}) = \{(w_1,\ldots,w_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) : \{\min dom^+(w_1), \ldots, \min dom^+(w_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$,
$\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{(w_1,\ldots,w_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : \{\min dom^+(w_1), \ldots, \min dom^+(w_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.

Παρατήρηση 2.2.3. *(i)* $\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ *και* $\emptyset \notin \widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ *για κάθε* $\xi \geq 1$.
(ii) $\widetilde{L}^m(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{(w_1,\ldots,w_m) : w_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} w_m \in \widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\}$ *για* $m \in \mathbb{N}$.
(iii) $\widetilde{L}^\omega(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{(w_1,\ldots,w_n) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : n \in \mathbb{N}, \min dom^+(w_1) = n\}$.
(iv) Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να ορίσουμε τα σύνολα $\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k})$, $\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ *μέσω του αρνητικού μέρους των λέξεων ως εξής*
$\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}) = \{(w_1,\ldots,w_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) : \{|\max dom^-(w_1)|, \ldots, |\max dom^-(w_l)|\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.
$\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{(w_1,\ldots,w_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : \{|\max dom^-(w_1)|, \ldots, |\max dom^-(w_l)|\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.

Η ακόλουθη πρόταση μας δείχνει την αναδρομικότητα των συστημάτων $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}))_{\xi<\omega_1}$ και $(\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_{\xi<\omega_1}$.
Για μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$ και $t \in \widetilde{L}_0(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$, θέτουμε

$$\mathcal{F}(t) = \{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}) : \text{είτε } \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_l) \neq \emptyset \text{ και } (t, w_1, \ldots, w_l) \in \mathcal{F} \text{ ή } \mathbf{w} = \emptyset \text{ και } (t) \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{F} - t = \{\mathbf{w} \in \mathcal{F} : \text{είτε } \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_l) \neq \emptyset \text{ και } t <_{R_1} w_1, \text{ ή } \mathbf{w} = \emptyset\}.$$

Πρόταση 2.2.4. *Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό $\xi \geq 1$, υπάρχει μια συγκεκριμένη ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από αριθμήσιμους διατακτικούς με $\xi_n < \xi$ τέτοια ώστε για αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N}$, $s \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k})$ και $t \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, με $\min dom^+(s) = \min dom^+(t) = n$, έχουμε*

$$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})(s) = \widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma, \vec{k}) \cap (\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) - s), \text{ και}$$
$$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)(t) = \widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap (\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) - t).$$

Επιπλέον, $\xi_n = \zeta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $\xi = \zeta + 1$, και $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνωσίως αύξουσα ακολουθία με $\sup_n \xi_n = \xi$ αν ξ είναι οριακός διατακτικός.

Απόδειξη. Έπεται από το Θεώρημα 1.6 στην [F3], σύμφωνα με το οποίο για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό $\xi > 0$ υπάρχει μια συγκεκριμένη ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από αριθμήσιμους διατακτικούς με $\xi_n < \xi$, τέτοια ώστε $\mathcal{A}_\xi(n) = \mathcal{A}_{\xi_n} \cap [\{n+1, n+2, \ldots\}]^{<\omega}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου,
$\mathcal{A}_\xi(n) = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega} : s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}, n < \min s$ και $\{n\} \cup s \in \mathcal{A}_\xi$ ή $s = \emptyset$ και $\{n\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.
Επιπλέον, $\xi_n = \zeta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $\xi = \zeta + 1$, και $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία με $\sup_n \xi_n = \xi$ αν ξ είναι οριακός διατακτικός. □

Προκειμένου να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, ένα θεώρημα τύπου Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις επεκτεταμένο σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο συμβολισμό:

Συμβολισμός

Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες. Για $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $t \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, θέτουμε:

$\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{w}) = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) : l \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_l \in \widetilde{E}(\vec{w})\} \cup \{\emptyset\}$,
$\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w}) = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : l \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_l \in \widetilde{EV}(\vec{w})\} \cup \{\emptyset\}$,
$\widetilde{E}(\mathbf{w}) = \{T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : 1 \leq n_1 < \ldots < n_\lambda \leq l$ και $(p_i, q_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $1 \leq p_i \leq k_{n_i}$, $1 \leq q_i \leq k_{-n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda\}$,
$\widetilde{EV}(\mathbf{w}) = \{T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : 1 \leq n_1 < \ldots <$

$n_\lambda \leq l$ και $(p_i, q_i) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{(0,0)\}$ με $0 \leq p_i \leq k_{n_i}$, $0 \leq q_i \leq k_{-n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $(0,0) \in \{(p_1, q_1), \ldots, (p_\lambda, q_\lambda)\}\}$,
$\widetilde{E}^{<\infty}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) : l \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_l \in \widetilde{E}(\mathbf{w})\} \cup \{\emptyset\}$,
και
$\widetilde{EV}^{<\infty}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : l \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_l \in \widetilde{EV}(\mathbf{w})\} \cup \{\emptyset\}$.
Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $\widetilde{EV}(\mathbf{w})$, $\widetilde{E}(\mathbf{w})$ είναι πεπερασμένα. Ακόμα, θέτουμε
$\vec{w} - t = (w_n)_{n \geq l} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, όπου $l = \min\{n \in \mathbb{N} : t <_{R_1} w_n\}$, και
$\vec{w} - \mathbf{w} = \vec{w} - w_l$.

Θεώρημα 2.2.5 (Διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey σε Schreier οικογένειες για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις)**.** *Έστω $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσες. Για κάθε οικογένεια $\mathcal{G} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})$, $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και κάθε άπειρη διατεταγμένη ακολουθία $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή υπάρχει μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ τέτοια ώστε*

είτε $\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{G}$, ή $\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \setminus \mathcal{G}$, και

είτε $\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$, ή $\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5 θα εφαρμόσουμε ένα διαγώνιο επιχείρημα, το οποίο περιέχεται στα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 2.2.6. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\vec{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, και*

$$\Pi = \{(t, \vec{s}) : \ t \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}), \ \vec{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \text{ με } \vec{s} \prec \vec{w} \text{ και } t <_{R_1} s_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του Π ικανοποιεί

(i) Για κάθε $(t, \vec{s}) \in \Pi$, υπάρχει $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, και

(ii) για κάθε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ και $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, έχουμε $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$,

τότε υπάχει $\vec{u} \prec \vec{w}$, τέτοια ώστε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ για κάθε $t \in \widetilde{E}(\vec{u})$ και $\vec{s} \prec \vec{u} - t$.

Απόδειξη. Έστω $u_0 = w_1$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχει $\vec{s}_1 = (s_n^1)_{n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{w} - u_0$ τέτοιο ώστε $(T_{(p,q)}(u_0), \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$ για κάθε $1 \leq p \leq k_1$, $1 \leq q \leq k_{-1}$. Έστω $u_1 = s_1^1$. Τότε, $u_0 <_{R_1} u_1$ και $u_0, u_1 \in \widetilde{EV}(\vec{w})$. Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $u_0, u_1, \ldots, u_n \in$

$\widetilde{EV}(\vec{w})$, με $\vec{s}_n \prec \ldots \prec \vec{s}_1 \prec \vec{w}$, $u_0 <_{R_1} u_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} u_n$ και $(t, \vec{s}_i) \in \mathcal{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $t \in \widetilde{E}((u_0, \ldots, u_{i-1}))$.

Θα κατασκευάσουμε τα $\vec{s}_{n+1}$ και u_{n+1}. Έστω $\{t_1, \ldots, t_l\} = \widetilde{E}((u_0, \ldots, u_n))$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχουν $\vec{s}^1_{n+1}, \ldots, \vec{s}^l_{n+1} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ τέτοια ώστε $\vec{s}^l_{n+1} \prec \ldots \prec \vec{s}^1_{n+1} \prec \vec{s}_n - u_n$ και $(t_i, \vec{s}^i_{n+1}) \in \mathcal{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq l$. Θέτουμε $\vec{s}_{n+1} = \vec{s}^l_{n+1}$. Αν $\vec{s}_{n+1} = (s^{n+1}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, θέτουμε $u_{n+1} = s^{n+1}_1$. Ισχύουν $u_n <_{R_1} u_{n+1}$, $u_{n+1} \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ και, σύμφωνα με τη συνθήκη (ii), $(t_i, \vec{s}_{n+1}) \in \mathcal{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq l$.

Θέτουμε $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε $\vec{u} \prec \vec{w}$, καθώς $u_0 <_{R_1} u_1 <_{R_1} \ldots \in \widetilde{EV}(\vec{w})$. Έστω $t \in \widetilde{EV}(\vec{u})$ και $\vec{s} \prec \vec{u} - t$. Θέτουμε $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \ t \in \widetilde{E}((u_0, u_1, \ldots, u_n))\}$. Καθώς $t \in \widetilde{E}((u_0, u_1, \ldots, u_{n_0}))$, έχουμε $(t, \vec{s}_{n_0+1}) \in \mathcal{R}$. Τότε, σύμφωνα με τη συνθήκη (ii), έχουμε $(t, \vec{u} - u_{n_0}) \in \mathcal{R}$, καθώς $\vec{u} - u_{n_0} \prec \vec{s}_{n_0+1}$, και επίσης $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$, καθώς $\vec{s} \prec \vec{u} - u_{n_0} = \vec{u} - t$. □

Λήμμα 2.2.7. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, και*

$$\Pi = \{(t, \vec{s}) : \ t \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon), \ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \text{ με } \vec{s} \prec \vec{w} \text{ και } t <_{R_1} s_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του Π ικανοποιεί

(i) Για κάθε $(t, \vec{s}) \in \Pi$, υπάρχει $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, και

(ii) για κάθε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ και $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, έχουμε $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$,

τότε υπάχει $\vec{u} \prec \vec{w}$, τέτοια ώστε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ για κάθε $t \in \widetilde{EV}(\vec{u})$ και $\vec{s} \prec \vec{u} - t$.

Απόδειξη. Έστω $u_0 = w_1$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχει $\vec{s}_1 = (s^1_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{w} - u_0$ τέτοιο ώστε $(u_0, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$. Έστω $u_1 = s^1_1$. Τότε, $u_0 <_{R_1} u_1$ και $u_0, u_1 \in \widetilde{EV}(\vec{w})$. Η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί ανάλογα με το Λήμμα 2.2.6. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5. Έστω $\mathcal{G} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})$, $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Για $\xi = 1$ το θεώρημα ισχύει σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4. Έστω $\xi > 1$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε $\zeta < \xi$. Έστω $t \in \widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $\min dom^+(t) = n$ και $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $\vec{s} \prec \vec{w}$ και $t <_{R_1} s_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.4, υπάρχει $\xi_n < \xi$ τέτοιο ώστε

$$\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)(t) = \widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap (\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) - t).$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}_1)\subseteq\mathcal{F}(t), \text{ ή}$$
$$\widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}_1)\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}(t).$$

Τότε $\vec{s}_1\prec\vec{s}\prec\vec{w}$, και είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}_1)\subseteq\mathcal{F}(t)$, ή $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}_1)\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}(t)$.

$$\text{Έστω } \mathcal{R}_1=\{(t,\vec{s}):\ t\in\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon),\ \vec{s}=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\widetilde{L}^{\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon),\vec{s}\prec\vec{w},$$
$$t<_{R_1}s_1, \text{ και είτε } \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s})\subseteq\mathcal{F}(t) \text{ ή}$$
$$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s})\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}(t)\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{R}_1$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) (με βάση τα προηγούμενα απιχειρήματα) και (ii) (προφανώς) του Λήμματος 2.2.7. Συνεπώς, υπάρχει $\vec{w}_1=(w_n^1)_{n\in\mathbb{N}}\prec\vec{w}$ τέτοια ώστε $(t,\vec{s})\in\mathcal{R}_1$ για κάθε $t\in\widetilde{EV}(\vec{w}_1)$ και $\vec{s}\prec\vec{w}_1-t$.

Ανάλογα, ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{R}_2=\{(t,\vec{s}):\ t\in\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k}),\ \vec{s}=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\widetilde{L}^{\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon),\vec{s}\prec\vec{w}_1,\ t<_{R_1}s_1, \text{ και}$$
$$\text{είτε } \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})(t)\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{s})\subseteq\mathcal{G}(t) \text{ ή}$$
$$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})(t)\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{s})\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k})\setminus\mathcal{G}(t)\}.$$

Έχουμε ότι η $\mathcal{R}_2$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του Λήμματος 2.2.6 για την ακολουθία $\vec{w}_1$. Άρα, υπάρχει $\vec{w}_2=(w_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\prec\vec{w}_1$ τέτοια ώστε $(t,\vec{s})\in\mathcal{R}_2$ για κάθε $t\in\widetilde{E}(\vec{w}_2)$ και $\vec{s}\prec\vec{w}_2-t$.

Έστω

$\mathcal{G}_1=\{t\in\widetilde{E}(\vec{w}_2):\ \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})(t)\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{w}_2-t)\subseteq\mathcal{G}(t)\}$, και

$\mathcal{F}_1=\{t\in\widetilde{EV}(\vec{w}_2):\ \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w}_2-t)\subseteq\mathcal{F}(t)\}$.

Χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για $\xi=1$ (Θεώρημα 2.1.4). Υπάρχει μια extraction με μεταβλητή $\vec{u}\prec\vec{w}_2$ της $\vec{w}_2$ τέτοια ώστε

είτε $\widetilde{E}(\vec{u})\subseteq\mathcal{G}_1$, ή $\widetilde{E}(\vec{u})\subseteq\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k})\setminus\mathcal{G}_1$, και,

είτε $\widetilde{EV}(\vec{u})\subseteq\mathcal{F}_1$, ή $\widetilde{EV}(\vec{u})\subseteq\widetilde{L}_0(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}_1$.

Καθώς $\vec{u}\prec\vec{w}_2$, έχουμε ότι $\widetilde{E}(\vec{u})\subseteq\widetilde{E}(\vec{w}_2)$ και $\widetilde{EV}(\vec{u})\subseteq\widetilde{EV}(\vec{w}_2)$, και, συνεπώς, ότι $(t,\vec{u}-t)\in\mathcal{R}_2$ για κάθε $t\in\widetilde{E}(\vec{u})$, $(t,\vec{u}-t)\in\mathcal{R}_1$ για κάθε $t\in\widetilde{EV}(\vec{u})$. Άρα

είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})(t)\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}-t)\subseteq\mathcal{G}(t)$ για κάθε $t\in\widetilde{E}(\vec{u})$,

ή $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})(t)\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}-t)\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k})\setminus\mathcal{G}(t)$ για κάθε $t\in\widetilde{E}(\vec{u})$, και,

είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}-t)\subseteq\mathcal{F}(t)$ για κάθε $t\in\widetilde{EV}(\vec{u})$, ή

$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)(t)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}-t)\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}(t)$ για κάθε $t\in\widetilde{EV}(\vec{u})$.

Συνεπώς,

είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u})\subseteq\mathcal{G}$,

ή $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k})\cap\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u})\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k})\setminus\mathcal{G}$, και,

είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})\subseteq\mathcal{F}$,

ή $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})\subseteq\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}$. $\square$

Στην περίπτωση που ξ είναι πεπερασμένος διατακτικός και $\xi = \omega$, το Θεώρημα 2.2.5 παίρνει την ακόλουθες μορφές.

Πόρισμα 2.2.8 (Διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις). *Έστω $m \in \mathbb{N}$, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $r, s \in \mathbb{N}$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Αν $\widetilde{L}^m(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ και $\widetilde{L}^m(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, τότε υπάρχει μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε*

$$\{(z_1, \ldots, z_m) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)) : z_1, \ldots, z_m \in \widetilde{EV}(\vec{u})\} \subseteq A_{i_0}, \text{ και}$$

$$\{(z_1, \ldots, z_m) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) : z_1, \ldots, z_m \in \widetilde{E}(\vec{u})\} \subseteq C_{j_0}.$$

Πόρισμα 2.2.9 (ω-Διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις). *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $r, s \in \mathbb{N}$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Αν $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ και $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, τότε υπάρχει μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε*

$\{(z_1, \ldots, z_n) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)) : n \in \mathbb{N}, \min dom^+(z_1) = n$ *και* $z_1, \ldots, z_n \in \widetilde{EV}(\vec{u})\} \subseteq A_{i_0}$,

$\{(z_1, \ldots, z_n) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})) : n \in \mathbb{N}, \min dom^+(z_1) = n$ *και* $z_1, \ldots, z_n \in \widetilde{E}(\vec{u})\} \subseteq C_{j_0}$.

Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ το Θεώρημα 2.2.5 έχει την ακόλουθη πεπερασμένη μορφή (Πόρισμα 2.2.11), που μπορεί να αποδειχθεί ανάλογα με το Πόρισμα 2.1.6, που αντιστοιχεί στην περίπτωση $\xi = 1$ και $l = 1$.

Συμβολισμός 2.2.10. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$. Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό $\xi \geq 1$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε*

$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}, n) = \{(w_1, \ldots, w_l) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) : |dom(w_1)| + \ldots + |dom(w_l)| = n\}$.

Πόρισμα 2.2.11. *Έστω $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $r, l \in \mathbb{N}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Τότε, υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\xi, r, l, \vec{k}) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}, n_0) = C_1 \cup \ldots \cup C_r$, υπάρχει $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$ να ισχύει*

$$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}, n_0) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\mathbf{t}) \subseteq C_{i_0}.$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε μια έννοια σύγκλισης συναρτήσεων $f : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{R}$, ισχυρότερη της συνήθους, που θα μελετηθεί περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 2.2.12. *Έστω* $f : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση,* $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *και* $\xi \geq 1$ *αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για* $y \in \mathbb{R}$ *ορίζουμε*

$\vec{w} - \xi - \lim f(x) = y \iff$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $|f((w_{n_1}, \ldots, w_{n_l})) - y| < \varepsilon$ *για κάθε* $(w_{n_1}, \ldots, w_{n_l}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{w})$ *με* $\min dom^{+}(w_{n_1}) \geq n_0$.

Θεώρημα 2.2.13. *Έστω* $\xi \geq 1$ *αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός,* $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ *αλφάβητο,* $\upsilon \notin \Sigma$ *μεταβλητή,* $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *και* $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ *έτσι ώστε* $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ *αύξουσες ακολουθίες. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Αν $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$ *τότε υπάρχουν* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *και* $1 \leq i_0 \leq r$ *ώστε* $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq A_{i_0}$.

(2) Για κάθε $f : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{R}$ *φραγμένη υπάρχουν* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *και* $y \in \mathbb{R}$ *ώστε* $\vec{u} - \xi - \lim f(x) = y$.

Απόδειξη. 1)⇒2) Έστω $f : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Υπάρχουν $a < b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})) \subseteq [a, b]$. Τότε, $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = f^{-1}(I_0^1) \cup f^{-1}(I_0^2)$, όπου $I_0^1 = [a, \frac{a+b}{2}]$ και $I_0^2 = [\frac{a+b}{2}, b]$. Από υπόθεση υπάρχει $\vec{u}_1 \prec \vec{w}$ ώστε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}_1) \subseteq f^{-1}(I_0^{i_1})$, $i_1 \in \{1, 2\}$. Έστω $I_1 = I_0^{i_1}$. Στη συνέχεια γράφουμε $I_1 = I_1^1 \cup I_1^2$ όπου τα I_1^1, I_1^2 είναι κλειστά διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{4}$. Από υπόθεση υπάρχει $\vec{u}_2 \prec \vec{u}_1$ ώστε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}_2) \subseteq f^{-1}(I_1^{i_2})$, $i_2 \in \{1, 2\}$. Έστω $I_2 = I_1^{i_2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάζουμε

i) $\vec{u}_{n+1} \prec \vec{u}_n \prec w$ όπου $\vec{u}_k = (w_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) I_n κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ μήκους $\frac{b-a}{2^n}$ ώστε $I_n \subseteq I_{n+1}$ με $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}_n) \subseteq f^{-1}(I_n)$.

Από την αρχή του κιβωτισμού έχουμε ότι $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{y\}$. Θεωρούμε τη διαγώνια ακολουθία $\vec{u} = (w_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Θα αποδείξουμε ότι $\vec{u} - \xi - \lim f(x) = y$. Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ έστω $k_0 \in \mathbb{N} : \frac{b-a}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Τότε για κάθε $(w_{n_1}, \ldots, w_{n_l}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}_{k_0})$ έχουμε $|f((w_{n_1}, \ldots, w_{n_l})) - y| \leq \frac{b-a}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Καθώς $w_k^{(k)} \in \widetilde{E}(\vec{u}_{k_0})$ για κάθε $k \geq k_0$, θέτοντας $n_0 = \min dom^{+}(w_{k_0}^{(k_0)})$ έχουμε $\{w \in \widetilde{E}(\vec{u}) : \min dom^{+}(w) \geq n_0\} \subseteq \widetilde{E}(\vec{u}_{k_0})$. Άρα, για κάθε $(w_{n_1}, \ldots, w_{n_l}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u})$ με $\min dom^{+}(w_{n_1}) \geq n_0$ έχουμε $(w_{n_1}, \ldots, w_{n_l}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}_{k_0})$, και άρα $|f((w_{n_1}, \ldots, w_{n_l})) - y| < \varepsilon$, δηλαδή $\vec{u} - \xi - \lim f(x) = y$.

2)⇒1) Έστω $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $f : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{R}$ απλή, με τύπο

$$f((w_{n_1}, \ldots, w_{n_l})) = i \iff (w_{n_1}, \ldots, w_{n_l}) \in A_i.$$

Από υπόθεση υπάρχουν $\vec{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \vec{w}$ και $y \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{u} - \xi - \lim f(x) = y$. Ισχυριζόμαστε ότι $y = i_0$ για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$. Πράγματι, αν αυτό δεν ίσχυε, τότε, από ορισμό της σύγκλισης, για $0 < \varepsilon < \min\{|i - y| : i = 1, \ldots, r\}$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f((w_{n_1}, \ldots, w_{n_l})) - y| < \varepsilon$ για κάθε $(w_{n_1}, \ldots, w_{n_l}) \in$

$\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u})$ με $\min dom^+(w_{n_1}) \geq n_0$, άτοπο. Άρα, για την $\vec{u'} = (u_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ έχουμε ότι $\widetilde{L}^\xi(\Sigma,\vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u'}) \subseteq A_{i_0}$, για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$. □

Παρατηρήσεις 2.2.14. *1) Αν $\vec{w} - 1 - \lim f(x) = y$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f(w) - y| < \varepsilon$ για κάθε $w \in \widetilde{L}(\Sigma,\vec{k}) \cap \widetilde{E}(\vec{w})$ με $\min dom^+(w) \geq n_0$, και άρα έχουμε ειδικότερα $f(w_n) \to y$.*

2) $\vec{w} - r - \lim f(x) = y \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|f((u_{n_1},\ldots,u_{n_r})) - y| < \varepsilon$ για κάθε $(u_{n_1},\ldots,u_{n_r}) \in \widetilde{L}^r(\Sigma,\vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{w})$ με $\min dom^+(u_{n_1}) \geq n_0$, και άρα ειδικότερα $|f((w_{n_1},\ldots,w_{n_r})) - y| < \varepsilon$ για κάθε $n_r > \ldots > n_1 \geq n_0$.

3) $\vec{w} - \omega - \lim f(x) = y \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|f((u_{n_1},\ldots,u_{n_l})) - y| < \varepsilon$ για κάθε $(u_{n_1},\ldots,u_{n_l}) \in \widetilde{L}^\omega(\Sigma,\vec{k}) \cap \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{w})$ με $\min dom^+(u_{n_1}) \geq n_0$, και άρα ειδικότερα $|f((w_{n_1},\ldots,w_{n_l})) - y| < \varepsilon$ για κάθε $n_l > \ldots > n_1 \geq n_0$.

Από το Θεώρημα 2.2.5 παίρνουμε άμεσα το αντίστοιχο θεώρημα για τις ω-located λέξεις.

Συμβολισμός 2.2.15. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία. Ορίζουμε τις πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-located λέξεις ως προς το Σ που κυριαρχούνται από την $\vec{k}$ ως εξής:*

$L^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_l) : l \in \mathbb{N},\ w_1 <_{R_2} \ldots <_{R_2} w_l \in L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\} \cup \{\emptyset\}$,

$L^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) = \{\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_l) : l \in \mathbb{N},\ w_1 <_{R_2} \ldots <_{R_2} w_l \in L(\Sigma,\vec{k})\} \cup \{\emptyset\}$.

Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό $\xi \geq 1$, θέτουμε

$L^\xi(\Sigma,\vec{k};\upsilon) = \{(w_1,\ldots,w_l) \in L^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : \{\min dom(w_1),\ldots,\min dom(w_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$,

$L^\xi(\Sigma,\vec{k}) = \{(w_1,\ldots,w_l) \in L^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) : \{\min dom(w_1),\ldots,\min dom(w_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.

Για $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ θέτουμε:

$EV^{<\infty}(\vec{w}) = \{\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_l) \in L^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) : l \in \mathbb{N}, u_1,\ldots,u_l \in EV(\vec{w})\} \cup \{\emptyset\}$, *και*

$E^{<\infty}(\vec{w}) = \{\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_l) \in L^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) : l \in \mathbb{N}, u_1,\ldots,u_l \in E(\vec{w})\} \cup \{\emptyset\}$.

Πόρισμα 2.2.16 (Διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey σε Schreier οικογένειες από ω-located λέξεις)**.** *Έστω $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία.*

Για κάθε $\mathcal{G} \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})$, $\mathcal{F} \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *και κάθε πεπερασμένη διατεταγμένη ακολουθία* $\vec{w} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *από* ω*-located λέξεις με μεταβλητή υπάρχει μια extraction* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *της* $\vec{w}$ *τέτοια ώστε:*

είτε $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap E^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{G}$, *ή* $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \cap E^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \setminus \mathcal{G}$, *και*

είτε $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap EV^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$, *ή* $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap EV^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{G} \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})$, $\mathcal{F} \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Θέτουμε $\widetilde{\Sigma} = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, $\vec{k}_* = (\widetilde{k}_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ και $\vec{w}_* = (\widetilde{w}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\widetilde{\Sigma}, \vec{k}_*; \upsilon)$ όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n$, $\widetilde{k}_{-n} = \widetilde{k}_n = k_n$ και $\widetilde{w}_n = \upsilon_{-n} \star w_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\widetilde{\varphi} : \widetilde{L}^{<\infty}(\widetilde{\Sigma} \cup \{\upsilon\}, \vec{k}_*) \to L^{<\infty}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$ με

$$\widetilde{\varphi}(u_1, \ldots, u_l) = (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_l)),$$

όπου $\varphi : \widetilde{L}_0(\widetilde{\Sigma} \cup \{\upsilon\}, \vec{k}_*) \to L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$ με $\varphi(w_{n_1} \ldots w_{n_l}) = w_{n_{i_0}} \ldots w_{n_l}$, όπου $n_{i_0} = \min dom^{+}(w_{n_1} \ldots w_{n_l})$. Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2.5 για τις οικογένειες $\widetilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{G})$, $\widetilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{F})$ και την ακολουθία $\vec{w}_*$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

2.3 Διαμεριστικά θεωρήματα για ακολουθίες ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων με μεταβλητή

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το Θεώρημα 2.3.12, το οποίο ισχυροποιεί το επεκτεταμένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για Schreier οικογένειες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή (Θεώρημα 2.2.5) στην περίπτωση που η διαμεριστική οικογένεια είναι δέντρο. Συγκεκριμένα, δοσμένου $\xi < \omega_1$ και μιας διαμεριστικής οικογένειας $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ από πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή ως προς αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ που κυριαρχούνται από ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ με $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσες, το Θεώρημα 2.2.5 δεν μας δίνει καμία πληροφορία στο να αποφανθούμε αν η ομογενής οικογένεια $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$ βρίσκεται στην $\mathcal{F}$ ή στο συμπλήρωμά της, $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$, ενώ το Θεώρημα 2.3.12, στην περίπτωση που η διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι δέντρο, μας παρέχει ένα κριτήριο, σε σχέση με έναν δείκτη τύπου Cantor-Bendixson της $\mathcal{F}$, σχετικά με αυτό.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3.12 παίρνουμε ένα διαμεριστικό θεώρημα για άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή (Θεώρημα 2.3.14), το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως ένα διαμεριστικό θεώρημα τύπου Nash-Williams για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή. Ακόμα, ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.12 μπορούμε να έχουμε ένα ισχυροποιημένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Nash-Williams για ω-located λέξεις με μεταβλητή ανάλογο του Θεωρήματος 2.3.14 (δες Πόρισμα 2.3.15).

Συμβολισμός

Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$. Μια πεπερασμένη διατεταγμένη ακολουθία $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι ένα **αρχικό κομμάτι** της $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ αν και μόνο αν $l \leq k$ και $w_i = u_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, l$ και $\mathbf{w}$ είναι **αρχικό κομμάτι** της $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ αν $w_i = u_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, l$. Στις περιπτώσεις αυτές γράφουμε $\mathbf{w} \propto \mathbf{u}$ και $\mathbf{w} \propto \vec{u}$ αντίστοιχα, και θέτουμε $\mathbf{u}\setminus\mathbf{w} = (u_{l+1}, \ldots, u_k)$ και $\vec{u} \setminus \mathbf{w} = (u_n)_{n>l}$.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες και $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.*

(i) *$\mathcal{F}$ είναι* **λεπτή** *αν δεν υπάρχουν στοιχεία $\mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathcal{F}$ με $\mathbf{w} \propto \mathbf{u}$ και $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$.*

(ii) *$\mathcal{F}^* = \{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : \mathbf{w} \propto \mathbf{u}$ για κάποιο $\mathbf{u} \in \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\}$.*

(iii) *$\mathcal{F}$ είναι* **δέντρο** *αν $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$.*

(iv) *$\mathcal{F}_* = \{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : \mathbf{w} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\mathbf{u})$ για κάποιο $\mathbf{u} \in \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\}$.*

(v) *$\mathcal{F}$ είναι* **hereditary** *αν $\mathcal{F}_* = \mathcal{F}$.*

Πρόταση 2.3.2. *Κάθε οικογένεια $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, για $\xi < \omega_1$ είναι λεπτή.*

Απόδειξη. Έπεται από το γεγονός ότι οι οικογένειες $\mathcal{A}_\xi$ είναι λεπτές (βλέπε [F3]) (που σημαίνει ότι αν $s, t \in \mathcal{A}_\xi$ και $s \propto t$, τότε $s = t$). □

Πρόταση 2.3.3. *Έστω ξ μη-μηδενικός αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$. Τότε*

(i) κάθε άπειρη διατεταγμένη ακολουθία $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ έχει κανονική αναπαράσταση ως προς $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, δηλαδή υπάρχει μοναδική γνησίως αύξουσα ακολουθία $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(s_1, \ldots, s_{m_1}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $(s_{m_{n-1}+1}, \ldots, s_{m_n}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ για κάθε $n > 1$, και,

(ii) κάθε μη-κενή πεπερασμένη διατεταγμένη ακολουθία $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ έχει κανονική αναπαράσταση ως προς $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, έτσι ώστε είτε $\mathbf{s} \in (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ή υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$, και $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ με $m_1 < \ldots < m_n \leq k$ τέτοιο ώστε είτε $(s_1, \ldots, s_{m_1}), \ldots, (s_{m_{n-1}+1}, \ldots, s_{m_n}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $m_n = k$, ή $(s_1, \ldots, s_{m_1}), \ldots, (s_{m_{n-1}+1}, \ldots, s_{m_n}) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, $(s_{m_n+1}, \ldots, s_k) \in (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Απόδειξη. Έπεται από το γεγονός ότι κάθε μη-κενή αύξουσα ακολουθία (πεπερασμένη ή άπειρη) στο $\mathbb{N}$ έχει κανονική αναπαράσταση ως προς $\mathcal{A}_\xi$ (βλέπε [F3]) και ότι η οικογένεια $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι λεπτή (Πρόταση 2.3.2). □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.3.3, μπορούμε να δώσουμε μια εναλλακτική περιγραφή του δεύτερου σκέλους της διχοτομίας που περιγράψαμε στο Θεώρημα 2.2.5 στην περίπτωση που η διαμεριστική οικογένεια είναι δέντρο.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\vec{u} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ δέντρο. Τότε*

$\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$ αν και μόνο αν
$\mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Απόδειξη. Έστω $\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$ και $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$. Η $\mathbf{s}$ έχει κανονική αναπαράσταση ως προς $\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (Πρόταση 2.3.3), συνεπώς είτε $\mathbf{s} \in (\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, όπως θέλουμε, ή υπάρχει $\mathbf{s}_1 \in \widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ τέτοια ώστε $\mathbf{s}_1 \propto \mathbf{s}$. Η δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατη. Πράγματι, καθώς $\mathcal{F}$ είναι δέντρο και $\mathbf{s} \in \mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$, έχουμε $\mathbf{s}_1 \in \mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \cap \widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ αντίθετα με την υπόθεσή μας. Άρα, $\mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^\xi(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. □

Ορισμός 2.3.5. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$. Θέτουμε*

$$D = \{(n, \alpha) : \text{ είτε } n \in \mathbb{Z}^- \text{ και } \alpha \in \{\upsilon, \alpha_{-k_n}, \ldots, \alpha_{-1}\} \\ \text{ ή } n \in \mathbb{N} \text{ και } \alpha \in \{\upsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}\}.$$

Παρατηρούμε ότι το D είναι αριθμήσιμο σύνολο. Έστω $[D]^{<\omega}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του D. Ταυτίζοντας κάθε $s \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με το αντίστοιχο στοιχείο του $[D]^{<\omega}$ και κατά συνέπεια κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και κάθε $\vec{s} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))$ με τις χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις $x_{\sigma(\mathbf{s})} \in \{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$ και $x_{\sigma(\vec{s})} \in \{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$ αντιστοίχως, όπου $\sigma(\mathbf{s}) = \{s_1, \ldots, s_k\}$ για κάθε $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, $\sigma(\vec{s}) = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ για κάθε $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\sigma(\emptyset) = \emptyset$, λέμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι **κατά σημείο κλειστή** *αν και μόνο αν το σύνολο $\{x_{\sigma(\mathbf{s})} : \mathbf{s} \in \mathcal{F}\}$ είναι κλειστό στην τοπολογία γινόμενο (ισοδύναμα την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης) του $\{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$ και ανάλογα, η οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι* **κατά σημείο κλειστή** *αν και μόνο αν $\{x_{\sigma(\vec{s})} : \vec{s} \in \mathcal{U}\}$ είναι κλειστό $\{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$ με την τοπολογία γινόμενο.*

Πρόταση 2.3.6. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες.*

(i) Αν $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι δέντρο, τότε η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο κλειστή αν και μόνο αν δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathbf{s}_n \propto \mathbf{s}_{n+1}$ και $\mathbf{s}_n \neq \mathbf{s}_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Αν $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι hereditary, τότε η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο κλειστή αν και μόνο αν δεν υπάρχει $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ τέτοια ώστε $\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}) \subseteq \mathcal{F}$.

(iii) Η hereditary οικογένεια $(\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}))_*$ είναι κατά σημείο κλειστή για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ και $\vec{u} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς (για λεπτομέρειες βλέπε [F3], [FN1]). □

Έστω $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Για μια hereditary και κατά σημείο κλειστή οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ θα ορίσουμε τον ισχυρό δείκτη Cantor-Bendixson $sO_{\vec{s}}(\mathcal{F})$ της $\mathcal{F}$ ως προς $\vec{s}$.

Ορισμός 2.3.7. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και έστω $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ μια hereditary και κατά σημείο κλειστή οικογένεια. Για κάθε $\xi < \omega_1$ ορίζουμε τις οικογένειες $(\mathcal{F})^{\xi}_{\vec{s}}$ επαγωγικά ως εξής:*
Για κάθε $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_l) \in \mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s})$ θέτουμε

$A_{\mathbf{w}} = \{t \in \widetilde{EV}(\vec{s}) : (w_1, \dots, w_l, t) \notin \mathcal{F}\}$ *και* $A_{\emptyset} = \{t \in \widetilde{EV}(\vec{s}) : (t) \notin \mathcal{F}\}$.
Ορίζουμε

$$(\mathcal{F})^1_{\vec{s}} = \{\mathbf{w} \in \mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}) \cup \{\emptyset\} : A_{\mathbf{w}} \text{ δεν περιέχει άπειρη διατεταγμένη ακολουθία}\}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $(\mathcal{F})^1_{\vec{s}}$ είναι hereditary, άρα κατά σημείο κλειστή (Πρόταση 2.3.6). Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε για κάθε $\xi > 1$ τα ξ-παράγωγα σύνολα της $\mathcal{F}$ αναδρομικά ακολούθως:

$(\mathcal{F})^{\zeta+1}_{\vec{s}} = ((\mathcal{F})^{\zeta}_{\vec{s}})^1_{\vec{s}}$ *για κάθε $\zeta < \omega_1$, και*

$(\mathcal{F})^{\xi}_{\vec{s}} = \bigcap_{\beta<\xi} (\mathcal{F})^{\beta}_{\vec{s}}$ *για ξ οριακό διατακτικό.*

*Ο **ισχυρός Cantor-Bendixson δείκτης** $sO_{\vec{s}}(\mathcal{F})$ της $\mathcal{F}$ ως προς $\vec{s}$ είναι ο μικρότερος αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $(\mathcal{F})^{\xi}_{\vec{s}} = \emptyset$.*

Παρατήρηση 2.3.8. *Έστω $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και έστω $\mathcal{F}_1, \mathcal{R}_1, \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ hereditary και κατά σημείο κλειστές οικογένειες.*

(i) $sO_{\vec{s}}(\mathcal{F}_1)$ είναι ένας αριθμήσιμος επόμενος διατακτικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του 'συνήθους' δείκτη Cantor-Bendixson $O(\mathcal{F}_1)$ της $\mathcal{F}_1$ στο $\{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$ (βλέπε [KM]).

(ii) $sO_{\vec{s}}(\mathcal{F}_1 \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s})) = sO_{\vec{s}}(\mathcal{F}_1)$.

(iii) $sO_{\vec{s}}(\mathcal{F}_1) \leq sO_{\vec{s}}(\mathcal{R}_1)$ *αν* $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{R}_1$.

(iv) *Αν* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ *και* $\mathbf{w} \in (\mathcal{F}_1)^{\xi}_{\vec{s}}$, *τότε για κάθε* $\mathbf{w}_1 \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}_1)$ *τέτοιο ώστε* $\sigma(\mathbf{w}_1) = \sigma(\mathbf{w}) \cap \widetilde{EV}(\vec{s}_1)$ *έχουμε ότι* $\mathbf{w}_1 \in (\mathcal{F}_1)^{\xi}_{\vec{s}_1}$, *καθώς* $\widetilde{EV}(\vec{s}_1) \subseteq \widetilde{EV}(\vec{s})$.

(v) *Αν* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, *τότε* $sO_{\vec{s}_1}(\mathcal{F}_1) \geq sO_{\vec{s}}(\mathcal{F}_1)$, *σύμφωνα με το* (iv).

(vi) *Αν* $\sigma(\vec{s}_1) \setminus \sigma(\vec{s})$ *είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε* $sO_{\vec{s}_1}(\mathcal{F}_1) \geq sO_{\vec{s}}(\mathcal{F}_1)$.

Ο αντίστοιχος ισχυρός δείκτης Cantor-Bendixson της $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι ίσος με $\xi + 1$, ως προς κάθε ακολουθία $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Πρόταση 2.3.9. *Έστω* $\xi < \omega_1$ *διατακτικός αριθμός,* $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ *αλφάβητο,* $\upsilon \notin \Sigma$ *μεταβλητή,* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε οι ακολουθίες* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι αύξουσες και* $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. *Τότε,*

$$sO_{\vec{s}_1}\Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big) = \xi + 1 \text{ για κάθε } \vec{s}_1 \prec \vec{s}.$$

Απόδειξη. Η οικογένεια $(\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*$ είναι hereditary και κατά σημείο κλειστή (Πρόταση 2.3.6). Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ ότι $\Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{\xi}_{\vec{s}_1} = \{\emptyset\}$ για κάθε $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ και $\xi < \omega_1$. Καθώς $(\widetilde{L}^{1}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_* = \{(t) : t \in \widetilde{EV}(\vec{s})\} \cup \{\emptyset\}$, έχουμε $\Big((\widetilde{L}^{1}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{1}_{\vec{s}_1} = \{\emptyset\}$ για κάθε $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$.

Έστω $\xi > 1$ και έστω ότι $\Big((\widetilde{L}^{\zeta}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{\zeta}_{\vec{s}_1} = \{\emptyset\}$ για κάθε $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ και $\zeta < \xi$. Για κάθε $t \in \widetilde{EV}(\vec{s})$ με $\min dom^+(t) = n$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.4, έχουμε

$$(\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))(t) = \widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s} - t) \text{ για } \xi_n < \xi.$$

Συνεπώς, για κάθε $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ και $t \in \widetilde{EV}(\vec{s}_1)$ με $\min dom^+(t) = n$ έχουμε ότι $\Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))(t)_*\Big)^{\xi_n}_{\vec{s}_1} = \Big((\widetilde{L}^{\xi_n}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s} - t))_*\Big)^{\xi_n}_{\vec{s}_1} = \{\emptyset\}$. Άρα $(t) \in \Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{\xi_n}_{\vec{s}_1}$. Έτσι, $\emptyset \in \Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{\xi}_{\vec{s}_1}$, καθώς αν $\xi = \zeta + 1$, τότε $(t) \in \Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{\zeta}_{\vec{s}_1}$ για κάθε $t \in \widetilde{EV}(\vec{s}_1)$ και αν ξ είναι οριακός διατακτικός, τότε $\emptyset \in \Big((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\Big)^{\xi_n}_{\vec{s}_1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sup \xi_n = \xi$.

Αν $\{\emptyset\} \neq \left((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\right)^{\xi}_{\vec{s}_1}$ για $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, τότε (σύμφωνα με το Λήμμα 2.8 στην [F5], χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το σύνολο $\{y \in \widetilde{EV}(\vec{s}_1) :\ \max dom^+(y) < n_0\}$ για $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο) υπάρχει $\vec{s}_2 \prec \vec{s}_1$ και $s \in \widetilde{EV}(\vec{s}_2)$ τέτοια ώστε $\left((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))(s)_*\right)^{\xi}_{\vec{s}_2} \neq \emptyset$, αντίφαση στην επαγωγική μας υπόθεση. Συνεπώς, $\left((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*\right)^{\xi}_{\vec{s}_1} = \{\emptyset\}$ και $sO_{\vec{s}_1}((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s}))_*) = \xi + 1$ για κάθε $\xi < \omega_1$. □

Πόρισμα 2.3.10. *Έστω ξ_1, ξ_2 αριθμήσιμοι διατακτικοί αριθμοί με $\xi_1 < \xi_2$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. Τότε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε*
$(\widetilde{L}^{\xi_1}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi_2}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi_2}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$.

Απόδειξη. Η οικογένεια $(\widetilde{L}^{\xi_1}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_* \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ είναι δέντρο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5 και την Πρόταση 2.3.4 υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε:
είτε $\widetilde{L}^{\xi_2}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi_1}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_*$,
ή $(\widetilde{L}^{\xi_1}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi_2}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi_2}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$.
Η πρώτη εναλλακτική της διχοτομίας είναι αδύνατη, διότι, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.9
$\xi_2+1 = sO_{\vec{u}}((\widetilde{L}^{\xi_2}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}))_*) \leq sO_{\vec{u}}((\widetilde{L}^{\xi_1}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_*) = \xi_1+1$. □

Το ακόλουθο Θεώρημα 2.3.12, το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής, βελτιώνει το Θεώρημα 2.2.5 στην περίπτωση που η ως προς διαμέριση οικογένεια είναι δέντρο.

Ορισμός 2.3.11. *Έστω $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ οικογένεια από πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή ως προς αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{Z}^*\}$, που κυριαρχούνται από μια αμφίπλευρη ακολουθία $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες. Θέτουμε*
$\mathcal{F}_h = \{\mathbf{w} \in \mathcal{F} :\ \widetilde{EV}^{<\infty}(\mathbf{w}) \subseteq \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\}$.
Τότε, η $\mathcal{F}_h$ είναι η μεγαλύτερη υποοικογένεια της $\mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ που είναι hereditary.

Θεώρημα 2.3.12. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}, (k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ μια οικογένεια από πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή που είναι δέντρο και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*
[Περίπτωση 1] *Η οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w})$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή.*

Τότε, υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ *τέτοια ώστε* $\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$.

[Περίπτωση 2] *Η οικογένεια* $\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w})$ *είναι κατά σημείο κλειστή. Τότε, θέτοντας*

$$\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}} = \sup\{sO_{\vec{u}}(\mathcal{F}_h) : \ \vec{u} \prec \vec{w}\} \ ,$$

που είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, έχουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

$2(i)$ *Αν* $\xi + 1 < \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$, *τότε υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *τέτοια ώστε*

$$\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F},$$

$2(ii)$ *αν* $\xi + 1 > \xi > \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$, *τότε για κάθε* $\vec{w}_1 \prec \vec{w}$ *υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}_1$ *τέτοια ώστε* $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$, *(ισοδύναμα* $\mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))$ *και*

$2(iii)$ *αν* $\xi + 1 = \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$ *ή* $\xi = \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$, *τότε υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *τέτοια ώστε*

είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$,
ή $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$.

Απόδειξη. **[Περίπτωση 1]** Αν η hereditary οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w})$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.6, υπάρχει $\vec{u} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ τέτοια ώστε $\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w}) \subseteq \mathcal{F}$. Βέβαια, $\vec{u} \prec \vec{w}$.
[Περίπτωση 2] Αν η hereditary οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w})$ είναι κατά σημείο κλειστή, τότε ο $\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, καθώς ο 'συνήθης' δείκτης Cantor-Bendixson $O(\mathcal{F}_h)$ της $\mathcal{F}_h$ στην $\{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$ είναι αριθμήσιμος (Παρατήρηση 2.3.8(i)) και ακόμα $sO_{\vec{u}}(\mathcal{F}_h) \leq O(\mathcal{F}_h)$ για κάθε $\vec{u} \prec \vec{w}$.

$2(i)$ Έστω $\xi+1 < \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$. Τότε υπάρχει $\vec{u}_1 \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $\xi+1 < sO_{\vec{u}_1}(\mathcal{F}_h)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5 και την Πρόταση 2.3.4, υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{u}_1$ τέτοια ώστε είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}$,
ή $\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))^* \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))_*$.
Η δεύτερη εναλλακτική είναι αδύνατη. Πράγματι, αν $\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))_*$, τότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3.8 και την Πρόταση 2.3.9,
$sO_{\vec{u}_1}(\mathcal{F}_h) \leq sO_{\vec{u}}(\mathcal{F}_h) = sO_{\vec{u}}(\mathcal{F}_h \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})) \leq sO_{\vec{u}}((\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))_*) = \xi + 1$, αντίφαση. Συνεπώς, $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$.

$2(ii)$ Έστω $\xi + 1 > \xi > \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$ και $\vec{w}_1 \prec \vec{w}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5, υπάρχει $\vec{u_1} \prec \vec{w}_1$ τέτοια ώστε είτε $\widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u_1}) \subseteq \mathcal{F}_h$,
ή $\widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u_1}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}_h$.
Η πρώτη εναλλακτική είναι αδύνατη. Πράγματι, αν $\widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u_1}) \subseteq$

$\mathcal{F}_h$, τότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3.8 και την Πρόταση 2.3.9, έχουμε ότι

$$\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}} + 1 = sO_{\vec{u}_1}((\widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}_1))_*) \leq sO_{\vec{u}_1}(\mathcal{F}_h) \leq \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}},$$

αντίφαση. Συνεπώς,

$$(1) \qquad \widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}_1) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\setminus\mathcal{F}_h\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5, υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{u}_1$ τέτοια ώστε

είτε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$,

ή $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \setminus \mathcal{F}$.

Ισχυριζόμαστε ότι η πρώτη εναλλακτική δεν ισχύει. Πράγματι, αν $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$, τότε $(\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)\cap\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}))^* \subseteq \mathcal{F}^* = \mathcal{F}$. Χρησιμοποιώντας την κανονική αναπαράσταση κάθε πεπερασμένης διατεταγμένης ακολουθίας από located λέξεις με μεταβλητή ως προς το $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ (Πρόταση 2.3.3) ελέγχουμε εύκολα ότι

$$(\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))^* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) = (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}))^*\,.$$

Συνεπώς, $(\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))^* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$.

Καθώς $\xi > \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.3.10, υπάρχει $\vec{t} \prec \vec{u}$ τέτοια ώστε

$$(\widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{t}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))^* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Έτσι, $(\widetilde{L}^{\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))_* \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{t}) \subseteq \mathcal{F}_h$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (1). Συνεπώς, $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \setminus \mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq (\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon))^* \setminus \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$.

2(iii) Στις πειπτώσεις που $\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}} = \xi + 1$ ή $\zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}} = \xi$, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.2.5. □

Το ακόλουθο άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 2.3.12 είναι χρήσιμο για εφαρμογές και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ισχυροποιημένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Nash-Williams για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή.

Πόρισμα 2.3.13. *Έστω $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ δέντρο και έστω $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. Τότε*

- (i) *είτε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$,*
- (ii) *ή για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό $\xi > \zeta_{\vec{w}}^{\mathcal{F}}$ υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$, τέτοια ώστε για κάθε $\vec{u}_1 \prec \vec{u}$ το μοναδικό αρχικό τμήμα της $\vec{u}_1$ που είναι στοιχείο της $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ ανήκει στο σύνολο $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon) \setminus \mathcal{F}$.*

Από το Θεώρημα 2.3.12 έπεται το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα Nash-Williams για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή.

Θεώρημα 2.3.14 (Διαμεριστικό θεώρημα για άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή)**.** *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες*

$(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι αύξουσες. Αν* $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *είναι μια κατά σημείο κλειστή οικογένεια από άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες από* ω-$\mathbb{Z}^*$*-located λέξεις με μεταβλητή και* $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$*, τότε υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *τέτοια ώστε*

$$\text{είτε} \quad \widetilde{EV}^{\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{U}, \quad \text{ή} \quad \widetilde{EV}^{\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} = \{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$: υπάρχει $\vec{s} \in \mathcal{U}$ τέτοια ώστε $\mathbf{w} \propto \vec{s}\}$. Καθώς η οικογένεια $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι δέντρο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 2.3.13. Άρα, έχουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

[Περίπτωση 1] Υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. Τότε, $\widetilde{EV}^{\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{U}$. Πράγματι, αν $\vec{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{EV}^{\infty}(\vec{u})$, τότε $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\vec{s}_n \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $(z_1, \ldots, z_n) \propto \vec{s}_n$. Καθώς η $\mathcal{U}$ είναι κατά σημείο κλειστή, έχουμε ότι $\vec{z} \in \mathcal{U}$ και συνεπώς ότι $\widetilde{EV}^{\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{U}$.

[Περίπτωση 2] Υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε για κάθε $\vec{u}_1 \prec \vec{u}$ υπάρχει ένα αρχικό τμήμα της $\vec{u}_1$ το οποίο ανήκει στο $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. Συνεπώς, $\widetilde{EV}^{\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}$. □

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.3.13, μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα που μπορεί να θεωρηθεί ως ισχυροποιημένο θεώρημα τύπου Nash-Williams για ω-located λέξεις με μεταβλητή.

Πόρισμα 2.3.15. *Έστω* $\mathcal{F} \subseteq L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *δέντρο (δες Ορισμό 2.3.1 (iii)) και έστω* $\vec{w} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$*. Τότε*

(i) *είτε υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *τέτοια ώστε* $EV^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$,

(ii) *ή υπάρχει* $\xi_0 < \omega_1$ *τέτοιος ώστε για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό* $\xi > \xi_0$ *να υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$*, τέτοια ώστε για κάθε* $\vec{u}_1 \prec \vec{u}$ *το μοναδικό αρχικό τμήμα της* $\vec{u}_1$ *που είναι στοιχείο του* $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *ανήκει στο* $L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$.

Ως συνέπεια του Πορίσματος 2.3.15 παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα τύπου Nash-Williams για ω-located λέξεις το οποίο επίσης έπεται από το Θεώρημα 15 του Carlson ([C]), που είναι θεώρημα τύπου Ellentuck.

Πόρισμα 2.3.16. *Έστω* $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ *αλφάβητο,* $\upsilon \notin \Sigma$ *μεταβλητή και* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *μια αύξουσα ακολουθία. Αν* $\mathcal{U} \subseteq L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *είναι μια κατά σημείο κλειστή οικογένεια και* $\vec{w} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$*, τότε υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *τέτοια ώστε*

$$\text{είτε } EV^{\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{U}, \quad \text{ή} \quad EV^{\infty}(\vec{u}) \subseteq L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}.$$

2.4 Χαρακτηρισμός των Ramsey διαμερίσεων των άπειρων ακολουθιών των ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων με μεταβλητή

Ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.12 αποδεικνύουμε στο Θεώρημα 2.4.2 παρακάτω, ένα διαμεριστικό θεώρημα για άπειρες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λεξεις με μεταβλητή ισχυρότερο από το Θεώρημα 2.3.14 συμπεριλαμβάνοντας μια τοπολογία $\mathfrak{T}_E$ στο χώρο $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ισχυρότερη της σχετικής τοπολογίας του $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ως προς την τοπολογία γινόμενο του $\{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$. Μια συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.2 (μαζί με το Πόρισμα 2.4.5) είναι ο χαρακτηρισμός των διαμερίσεων Ramsey του $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ως προς τη Baire ιδιότητα στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$ (στο Θεώρημα 2.4.7).

Θα ορίσουμε παρακάτω την τοπολογία $\mathfrak{T}_E$ στο χώρο $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, που είναι η ανάλογη της τοπολογίας Ellentuck στο $\mathbb{N}$ που ορίζεται στην [E].

Ορισμός 2.4.1. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες. Ορίζουμε την τοπολογία $\mathfrak{T}_E$ στο $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ως την τοπολογία με βασικά ανοικτά σύνολα της μορφής:*

$$[\mathbf{t}, \vec{s}] = \{\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : \mathbf{t} \propto \vec{w} \quad \textit{και} \quad \vec{w} - \mathbf{t} \prec \vec{s}\} ,$$

όπου $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{s} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Η τοπολογία $\mathfrak{T}_E$ είναι ισχυρότερη της σχετικής τοπολογίας του $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ ως προς την τοπολογία γινόμενο του $\{0,1\}^{[D]^{<\omega}}$, η οποία έχει βασικά ανοικτά σύνολα της μορφής $\{\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : \mathbf{t} \propto \vec{w}\}$, τα οποία είναι ανοικτά στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$.

Συμβολίζουμε με $\hat{\mathcal{U}}$ και $\mathcal{U}^\diamondsuit$ την κλειστή θήκη και το εσωτερικό αντίστοιχα της οικογένειας $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\hat{\mathcal{U}} = \{\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : \ [\mathbf{t}, \vec{w}] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \ \textit{για κάθε} \ \ \mathbf{t} \propto \vec{w}\}, \textit{και}$$
$$\mathcal{U}^\diamondsuit = \{\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) : \textit{υπάρχει}\ \mathbf{t} \propto \vec{w} \ \ \textit{τέτοια ώστε}\ [\mathbf{t}, \vec{w}] \subseteq \mathcal{U}\} .$$

Αν $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με $t_k <_{R_1} s_1$, τότε θέτουμε $\mathbf{t} \odot \mathbf{s} = (t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}, (k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε*

είτε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$, *ή υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός* $\xi_0 = \zeta^{\mathcal{U}}_{(\mathbf{s},\vec{w})}$ *τέτοιος ώστε για κάθε* $\xi > \xi_0$ *υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w} - \mathbf{t}$ *με* $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}] \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}$ *για κάθε* $\mathbf{s} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$.

Θα δώσουμε την απόδειξη μετά το ακόλουθο λήμμα που είναι ανάλογο του Λήμματος 2.2.6.

Λήμμα 2.4.3. *Έστω* $\mathcal{R} \subseteq \{[\mathbf{t}, \vec{s}] : \mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *και* $\vec{s} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\}$ *με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) για κάθε $(\mathbf{t}, \vec{s}) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \times \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *υπάρχει* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ *τέτοια ώστε* $[\mathbf{t}, \vec{s}_1] \in \mathcal{R}$, *και*

(ii) για κάθε $[\mathbf{t}, \vec{s}] \in \mathcal{R}$ *και* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ *έχουμε* $[\mathbf{t}, \vec{s}_1] \in \mathcal{R}$.

Τότε, για κάθε $(\mathbf{t}, \vec{w}) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \times \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ *υπάρχει* $\vec{s} \in [\mathbf{t}, \vec{w}]$ *τέτοια ώστε* $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}] \in \mathcal{R}$ *για κάθε* $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s} - \mathbf{t})$ *και* $\vec{u} \prec \vec{s} - \mathbf{t}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vec{w} - \mathbf{t} = \vec{w}$. Σύμφωνα με την υπόθεση (i), υπάρχει $\vec{s}_1 \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t}, \vec{s}_1] \in \mathcal{R}$. Υποθέτουμε ότι $\vec{s}_n \prec \ldots \prec \vec{s}_1 \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ έχουν κατασκευαστεί και ότι $\vec{s}_n = (s_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_\lambda\} = \widetilde{EV}^{<\infty}((s_1^1, \ldots, s_n^n))$. Σύμφωνα με το (i), υπάρχει $\vec{s}^1_{n+1} \prec \vec{s}_n - s_n^n$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_1, \vec{s}^1_{n+1}] \in \mathcal{R}$, $\vec{s}^2_{n+1} \prec \vec{s}^1_{n+1}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_2, \vec{s}^2_{n+1}] \in \mathcal{R}$, και τελικά $\vec{s}^\lambda_{n+1} \prec \vec{s}^{\lambda-1}_{n+1} \prec \vec{s}_n - s_n^n$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_\lambda, \vec{s}^\lambda_{n+1}] \in \mathcal{R}$. Θέτουμε $\vec{s}_{n+1} = \vec{s}^\lambda_{n+1} = (s_i^{n+1})_{i \in \mathbb{N}}$. Τότε, σύμφωνα με το (ii), $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_i, \vec{s}_{n+1}] \in \mathcal{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.

Θέτουμε $\vec{s} = (t_1, \ldots, t_k, s_1^1, s_2^2, \ldots) \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε $\vec{s} \in [\mathbf{t}, \vec{w}]$. Έστω $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{s} - \mathbf{t})$ με $\mathbf{s} \neq \emptyset$. Αν $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}((s_1^1, \ldots, s_n^n))\}$, τότε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{s}_{n_0+1}] \in \mathcal{R}$. Έστω $\vec{u} \prec \vec{s} - \mathbf{t}$. Τότε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}] = [\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u} - s_{n_0}^{n_0}] \in \mathcal{R}$, σύμφωνα με την υπόθεση (ii). Αν $\mathbf{s} = \emptyset$, τότε $[\mathbf{t}, \vec{s}_1] \in \mathcal{R}$, συνεπώς $[\mathbf{t}, \vec{u}] \in \mathcal{R}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2. Έστω $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Θέτουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{U}} = \{[\mathbf{w}, \vec{s}] :\ & (\mathbf{w}, \vec{s}) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \times \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \text{ και} \\ & \text{είτε } \ [\mathbf{w}, \vec{s}] \cap \mathcal{U} = \emptyset \quad \text{ή} \quad [\mathbf{w}, \vec{s}_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \text{ για κάθε } \ \vec{s}_1 \prec \vec{s}\} \ .\end{aligned}$$

Ελέγχεται εύκολα ότι το $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (i) και (ii) του Λήμματος 2.4.3, συνεπώς, υπάρχει $\vec{w}_1 \in [\mathbf{t}, \vec{w}]$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{w}_1] \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ για κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w}_1 - \mathbf{t})$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w}_1 - \mathbf{t}) : [\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{w}_2] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ για κάθε } \vec{w}_2 \prec \vec{w}_1\} \ .$$

Η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι δέντρο. Πράγματι, έστω $\mathbf{s} \in \mathcal{F}$ και $\mathbf{s}_1 \propto \mathbf{s}$. Τότε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_1, \vec{w}_1] \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$, καθώς $\mathbf{s}_1 \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w}_1 - \mathbf{t})$. Έτσι, είτε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_1, \vec{w}_1] \cap \mathcal{U} = \emptyset$, το οποίο είναι αδύνατο, καθώς $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{w}_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, ή $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}_1, \vec{w}_2] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $\vec{w}_2 \prec \vec{w}_1$. Συνεπώς, $\mathbf{s}_1 \in \mathcal{F}$.

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.3.12 για την $\mathcal{F}$ και την $\vec{w}_1 - \mathbf{t}$. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

[Περίπτωση 1] Υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}_1 - \mathbf{t} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $\widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}$. Αυτό δίνει ότι $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$ και $\vec{u}_1 \prec \vec{u}$, το οποίο έπεται ότι $[\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$.

[Περίπτωση 2] Υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός $\xi_0 = \zeta^{\mathcal{U}}_{(\mathbf{s},\vec{w})}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\xi > \xi_0$ υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}_1 - \mathbf{t} \prec \vec{w} - \mathbf{t}$ με $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}) \subseteq \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{F}$. Τότε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}] \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}$ για κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$. □

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4.2 σε οικογένειες $\mathcal{U}$ οι οποίες είναι κλειστές (οι κατά σημείο κλειστές οικογένειες περιέχονται σε αυτή την κλάση) ή meager (δηλαδή αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων) στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$, έχουμε τις ακόλουθες συνέπειες.

Πόρισμα 2.4.4. *Έστω $\mathcal{U}$ κλειστό υποσύνολο του $\widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ για την τοπολογία $\mathfrak{T}_E$, $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε*

είτε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστετ $[\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \mathcal{U}$,

ή υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός $\xi_0 = \zeta^{\mathcal{U}}_{(\mathbf{s},\vec{w})}$, τέτοιος ώστε για κάθε $\xi > \xi_0$ υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w} - \mathbf{t}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}] \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}$ για κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$.

Πόρισμα 2.4.5. *Έστω $\mathcal{U}$ υποσύνολο του $\widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ meager στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$, $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Τότε, υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ξ_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\xi > \xi_0$ υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w} - \mathbf{t}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}] \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U}$ για κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u})$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.4.2 για την $\mathcal{U}$. Θα αποδείξουμε ότι το πρώτο σκέλος της διχοτομίας είναι αδύνατο. Πράγματι, έστω $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$. Αν $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ με $(\hat{\mathcal{U}}_n)^{\diamond} = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θέτουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \{[\mathbf{w}, \vec{s}] : \mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon),\ \vec{s} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)\ \text{ και }\\ [\mathbf{w}, \vec{s}] \cap \mathcal{U}_k = \emptyset \ \text{ για κάθε }\ k \in \mathbb{N} \text{ με } k \leq |\mathbf{w}|\},\end{aligned}$$

όπου $|\mathbf{w}|$ συμβολίζει την πληθηκότητα του συνόλου $\sigma(\mathbf{w})$.

Η οικογένεια $\mathcal{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του Λήμματος 2.4.3. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.2, για κάθε $\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, $\vec{s} \in$

$\widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{w}, \vec{s}_1] \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$, καθώς είναι αδύνατο να ισχύει $[\mathbf{w}, \vec{s}_1] \subseteq \hat{\mathcal{U}}_k$. Άρα η $\mathcal{R}$ ικανοποιεί το (i) και (προφανώς) το (ii). Συνεπώς, υπάρχει $\vec{u}_1 \in [\mathbf{t}, \vec{u}]$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}_1] \in \mathcal{R}$ για κάθε $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}_1 - \mathbf{t})$. Τότε, $[\mathbf{t}, \vec{u}_1] \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Πράγματι, έστω $\vec{u}_2 \in [\mathbf{t}, \vec{u}_1] \cap \mathcal{U}$. Τότε, $\vec{u}_2 \in [\mathbf{t}, \vec{u}_1] \cap \mathcal{U}_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχει $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}_1 - \mathbf{t})$ με $\mathbf{t} \odot \mathbf{s} \propto \vec{u}_2$, $k \leq |\mathbf{t} \odot \mathbf{s}|$ και $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}_1] \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$. Τότε, $[\mathbf{t} \odot \mathbf{s}, \vec{u}_1] \notin \mathcal{R}$. Αντίφαση, καθώς $\mathbf{s} \in \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{u}_1 - \mathbf{t})$. Συνεπώς, $[\mathbf{t}, \vec{u}_1] \cap \mathcal{U} = \emptyset$ και άρα $\vec{u}_1 \notin \hat{\mathcal{U}}$. Αλλά $\vec{u}_1 \in [\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$, άτοπο. Συνεπώς, το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 2.4.2 ισχύει για τη $\mathcal{U}$. □

Ορισμός 2.4.6. *Μια οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ από άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή καλείτε* **πλήρως Ramsey** *αν για κάθε $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και κάθε $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε*

$$\text{είτε} \quad [\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \mathcal{U} \quad \text{ή} \quad [\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{U} .$$

Μια συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.2 είναι ο χαρακτηρισμός των πλήρως Ramsey οικογενειών από άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις με μεταβλητή.

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ άπειρο αριθμήσιμο αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μεταβλητή και $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσες. Μια οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι πλήρως Ramsey αν και μόνο αν η $\mathcal{U}$ έχει την ιδιότητα Baire στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ με την ιδιότητα Baire στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$. Τότε $\mathcal{U} = \mathcal{B} \triangle \mathcal{C} = (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}^c) \cup (\mathcal{C} \cap \mathcal{B}^c)$, όπου $\mathcal{B} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι $\mathfrak{T}_E$-κλειστό και $\mathcal{C} \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ είναι $\mathfrak{T}_E$-meager ($\mathcal{C}^c = \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon) \setminus \mathcal{C}$). Έστω $\mathbf{t} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.4.4 και την Πρόταση 2.3.3, υπάρχει $\vec{u}_1 \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $[\mathbf{t}, \vec{u}_1] \subseteq \mathcal{C}^c$ και σύμφωνα με το Πόρισμα 2.4.5 υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{u}_1$ τέτοια ώστε

είτε $[\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \mathcal{B} \cap [\mathbf{t}, \vec{u}_1] \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{C}^c \subseteq \mathcal{U}$ ή $[\mathbf{t}, \vec{u}] \subseteq \mathcal{B}^c \cap [\mathbf{t}, \vec{u}_1] \subseteq \mathcal{B}^c \cap \mathcal{C}^c \subseteq \mathcal{U}^c$. Συνεπώς, η $\mathcal{U}$ είναι πλήρως Ramsey.

Αντίστροφα, αν η $\mathcal{U}$ είναι πλήρως Ramsey, τότε $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\diamondsuit} \cup (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^{\diamondsuit})$ και $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^{\diamondsuit}$ είναι ένα meager σύνολο στην $\mathfrak{T}_E$. Συνεπώς η $\mathcal{U}$ έχει την ιδιότητα Baire στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$. □

2.5 Διαμεριστικά θεωρήματα για ακολουθίες ρητών αριθμών

Οι T. Budak, N. Işik και J. Pym στην [BIP] (Θεώρημα 4.2) εισήγαγαν μια αναπαράσταση των ρητών αριθμών με συγκεκριμένες ιδιότητες, σύμφωνα με την οποία κάθε μη-μηδενικός ρητός αριθμός μπορεί να ταυτιστεί με μια ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξη ως προς το αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$, όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$, που κυριαρχείται από την $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, όπου $k_{-n} = k_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, όλα τα αποτελέσματα που αφορούν ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις ως προς ένα αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$ που κυριαρχούνται από μια $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$, που αποδείχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, μπορούν να αναδιατυπωθούν και να δώσουν αποτελέσματα στους ρητούς αριθμούς.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε ένα ισχυροποιημένο θεώρημα τύπου van der Waerden για το σύνολο των ρητών αριθμών στο Θεώρημα 2.5.2 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.2, ένα επεκτεταμένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό για το σύνολο των ρητών αριθμών στο Θεώρημα 2.5.7 ως συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.4, και ένα διαμεριστικό θεώρημα τύπου Nash-Williams για άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες ρητών αριθμών στο Θεώρημα 2.5.14 ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.14.

Αναλυτικά, σύμφωνα με την [BIP] κάθε ρητός αριθμός q εκφράζεται μοναδικά στη μορφή

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_{-s}\frac{(-1)^s}{(s+1)!} \ + \ \sum_{r=1}^{\infty} q_r(-1)^{r+1}r!$$

όπου $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $0 \leq q_{-s} \leq s$ για κάθε $s > 0$, $0 \leq q_r \leq r$ για κάθε $r > 0$ και $q_{-s} = q_r = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα r, s. Έτσι, για κάθε μη-μηδενικό ρητό αριθμό q, υπάρχουν μοναδικά $l \in \mathbb{N}$, $\{t_1 < \ldots < t_l\} = dom(q) \in [\mathbb{Z}^*]^{<\omega}_{>0}$ και $\{q_{t_1}, \ldots, q_{t_l}\} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq q_{t_i} \leq -t_i$ αν $t_i < 0$ και $1 \leq q_{t_i} \leq t_i$ αν $t_i > 0$ για κάθε $1 \leq i \leq l$, τέτοια ώστε ορίζοντας $dom^-(q) = \{t \in dom(q) : \ t < 0\}$ και $dom^+(q) = \{t \in dom(q) : \ t > 0\}$ να έχουμε

$$q = \sum_{t\in dom^-(q)} q_t\frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} \ + \sum_{t\in dom^+(q)} q_t(-1)^{t+1}t! \quad (\text{θέτουμε } \sum_{t\in\emptyset} = 0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$e^{-1} - 1 = -\sum_{t=1}^{\infty}\frac{2t-1}{(2t)!} < \sum_{t\in dom^-(q)} q_t\frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} < \sum_{t=1}^{\infty}\frac{2t}{(2t+1)!} = e^{-1}$$

και ότι

$$\sum_{t\in dom^+(q)} q_t(-1)^t(t+1)! \in \mathbb{Z}^* \ \text{ αν } \ dom^+(q) \neq \emptyset.$$

Έστω $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ και $k_{-n} = k_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$. Για $\upsilon = 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \widetilde{L}(\Sigma \cup \{0\}, \vec{k}) \to \mathbb{Q}$, που στέλνει τη λέξη $w = q_{t_1} \dots q_{t_l} \in \widetilde{L}(\Sigma \cup \{0\}, \vec{k})$ στο ρητό αριθμό

$$g(w) = \textstyle\sum_{t \in dom^-(w)} q_t \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} \; + \; \sum_{t \in dom^+(w)} q_t (-1)^{t+1} t!.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο περιορισμός της g στο σύνολο των σταθερών λέξεων $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ είναι 1-1 και επί του $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ και ότι $g(w_1 \star w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ για κάθε $w_1 <_{R_1} w_2 \in \widetilde{L}(\Sigma \cup \{0\}, \vec{k})$. Ακόμα, παρατηρούμε ότι, μέσω της συνάρτησης g, κάθε λέξη με μεταβλητή $w = q_{t_1} \dots q_{t_l} \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; 0)$ αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση q που στέλνει κάθε $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $1 \le i \le -\max dom^-(w)$, $1 \le j \le \min dom^+(w)$, στο

$$q(i,j) = g(T_{(j,i)}(w)) = \sum_{t \in C^-} q_t \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t \in V^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C^+} q_t (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t \in V^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C^- = \{t \in dom^-(w) : \; q_t \in \Sigma\}$, $V^- = \{t \in dom^-(w) : \; q_t = 0\}$ και $C^+ = \{t \in dom^+(w) : \; q_t \in \Sigma\}$, $V^+ = \{t \in dom^+(w) : \; q_t = 0\}$.

Για δύο μη-μηδενικούς ρητούς αριθμούς $q_1, q_2 \in g(\widetilde{L}_0(\Sigma, \vec{k}))$ θέτουμε

$$q_1 \prec q_2 \iff g^{-1}(q_1) <_{R_1} g^{-1}(q_2).$$

Συμβολισμός 2.5.1. *Έστω $(X, +)$ τυχαία ημιομάδα. Για $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ θέτουμε*

$$FS[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \{x_{n_1} \; + \; \dots \; + \; x_{n_l} : \; n_1 < \dots < n_l \in \mathbb{N}\}.$$

Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συμβολισμό, μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1.2 για ρητούς αριθμούς.

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω $\mathbb{Q} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$ για $r \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχει $1 \le i_0 \le r$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνάρτηση $q_n : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{Q}$ με*

$$q_n(i,j) = \sum_{t \in C_n^-} q_t^n \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t \in V_n^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C_n^+} q_t^n (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t \in V_n^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C_n^-, V_n^- \in [\mathbb{Z}^-]_{>0}^{<\omega}$, $C_n^+, V_n^+ \in [\mathbb{N}]_{>0}^{<\omega}$ με $C_n^- \cap V_n^- = \emptyset = C_n^+ \cap V_n^+$, $q_t^n \in \mathbb{N}$ με $1 \le q_t^n \le -t$ για $t \in C_n^-$, $1 \le q_t^n \le t$ για $t \in C_n^+$, που ικανοποιούν $q_n(i_n, j_n) \prec q_{n+1}(i_{n+1}, j_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

$$FS\big[\big(q_n(i_n, j_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}\big] \subseteq Q_{i_0}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ με $0 \le i_n, j_n \le n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $g : \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; 0) \to \mathbb{Q}$ που ορίστηκε προηγουμένως. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.2 υπάρχει ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; 0)$ και $1 \leq i_0 \leq r$, τέτοια ώστε $T_{(i_1,j_1)}(w_{n_1}) \star \ldots \star T_{(i_\lambda,j_\lambda)}(w_{n_\lambda}) \in g^{-1}(Q_{i_0})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $(i_l, j_l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ τέτοια ώστε $0 \leq i_l, j_l \leq n_l$, για κάθε $1 \leq l \leq \lambda$ και $(0,0) \in \{(i_1,j_1),\ldots,(i_\lambda,j_\lambda)\}$. Έστω $w_n = w^n_{m^n_1} \ldots w^n_{m^n_{l_n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $q_n(i,j) = g(w_{3n-2} \star T_{(j,i)}(w_{3n-1}) \star T_{(1,1)}(w_{3n}))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0 \leq i, j \leq n$. Οι συναρτήσεις q_n ικανοποιούν τις ζητούμενες ιδιότητες. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.4 είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 2.5.3. *Έστω $\mathbb{Q} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, $r \in \mathbb{N}$ και $M \in [\mathbb{Z}]$ ώστε $M \cap \mathbb{Z}^-$ άπειρο και $M \cap \mathbb{N}$ άπειρο. Τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ και ακολουθία συναρτήσεων $q^n : \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\} \to \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε για $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq i,j \leq n$,*

(i) $q^n(i,j) = \sum_{s=1}^{l^1_n} q^n_s \sum_{t\in V^-_{n,s}} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t\in V^-_n} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + j \sum_{t\in V^+_n} (-1)^{t+1} t!$ $+ \sum_{s=1}^{l^2_n} p^n_s \sum_{t\in V^+_{n,s}} (-1)^{t+1} t!$, *όπου* $V^-_{n,s}, V^-_n$, $s = 1,\ldots,l^1_n$ *ξένα ανά δύο με* $V^-_{n,s} \in [M\cap\mathbb{Z}^-]^{<\omega}$, $s = 1,\ldots,l^1_n$, $V^-_n \in [M\cap\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $V^+_{n,s}, V^+_n$, $s = 1,\ldots,l^2_n$ *ξένα ανά δύο με* $V^+_{n,s} \in [M\cap\mathbb{N}]^{<\omega}$, $s = 1,\ldots,l^2_n$, $V^+_n \in [M\cap\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $q^n_s, p^n_s \in \mathbb{N}$, $1 \leq q^n_s, p^n_s \leq n$, *(θέτουμε $\sum_{t\in\emptyset} = 0$) και*

(ii) $q^n(i_n,j_n) \prec q^{n+1}(i_{n+1},j_{n+1})$, *για κάθε* $1 \leq i_n, j_n \leq n$, $1 \leq i_{n+1}, j_{n+1} \leq n+1$

τα οποία ικανοποιούν

$$FS\big[\big(q^n(i_n,j_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big] \subseteq Q_{i_0}$$
$$\text{για κάθε } ((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ με } 1 \leq i_n, j_n \leq n.$$

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, όπου $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, $k_{-n} = k_n = n$ και $\upsilon = 0$, ώστε $w_n = \upsilon_{t^n_1} \ldots \upsilon_{t^n_{l_n}}$ με $dom^-(w_n) \subseteq M \cap \mathbb{Z}^-$ και $dom^+(w_n) \subseteq M \cap \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια τέτοια ακολουθία κατασκευάζεται άμεσα με επαγωγή δεδομένου ότι τα σύνολα $M \cap \mathbb{Z}^-$ και $M \cap \mathbb{N}$ είναι άπειρα. Από το Θεώρημα 2.1.4 υπάρχει $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraction της $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $1 \leq i_0 \leq r$ ώστε $\widetilde{EV}(\vec{u}) \subseteq g^{-1}(Q_{i_0})$. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $q^n(i,j) = g(T_{(j,i)}(u_n))$ για κάθε $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Το Θεώρημα 2.5.2 έχει την ακόλουθη πεπερασμένη μορφή.

Συμβολισμός 2.5.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathbb{Q}_n = \{q \in \mathbb{Q} : |dom(q)| = n\}$.*

Πόρισμα 2.5.5. *Έστω* $r, m \in \mathbb{N}$ *και* $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. *Υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(r, m, n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε αν* $\mathbb{Q}_{n_0} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, *τότε υπάρχουν* $1 \leq i_0 \leq r$ *και, για κάθε* $1 \leq s \leq m$, *συνάρτηση* $q_s : \{1, \ldots, n_s\} \times \{1, \ldots, n_s\} \to \mathbb{Q}$ *με*

$$q_s(i,j) = \sum_{t \in C_s^-} q_t^s \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t \in V_s^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C_s^+} q_t^s (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t \in V_s^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C_s^- \in [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}, V_s^- \in [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $C_s^+ \in [\mathbb{N}]^{<\omega}, V_s^+ \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ *με* $C_s^- \cap V_s^- = \emptyset = C_s^+ \cap V_s^+$, $q_t^s \in \mathbb{N}$ *με* $1 \leq q_t^s \leq -t$ *για* $t \in C_s^-$, $1 \leq q_t^s \leq t$ *για* $t \in C_s^+$, *που ικανοποιούν* $q_1(i_1, j_1) \prec \ldots \prec q_m(i_m, j_m)$, *και*

$$q_1(i_1, j_1) + \ldots + q_m(i_m, j_m) \in Q_{i_0}$$

για κάθε $(i_s, j_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *με* $1 \leq i_s, j_s \leq n_s$, $1 \leq s \leq m$.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.2.5 με την αναπαράσταση των ρητών αριθμών μέσω της συνάρτησης g, ανάλογα του Θεωρήματος 2.5.2, παίρνουμε το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ για το σύνολο των ρητών αριθμών. Η περίπτωση $\xi = 1$ αντιστοιχεί στο Θεώρημα 2.5.2.

Συμβολισμός 2.5.6. *Για μια τυχαία ημιομάδα* $(X, +)$ *και μια ακολουθία* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, *για*
$y_1 = x_{n_1} + \ldots + x_{n_l}$, $y_2 = x_{m_1} + \ldots + x_{m_\nu} \in FS[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ *γράφουμε* $y_1 < y_2$ *αν* $n_l < m_1$,
και
$\left[FS[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]\right]^{<\infty}_{>0} = \{(y_1, \ldots, y_m) : \ m \in \mathbb{N}, \ y_1 < \ldots < y_m \in FS[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]\}$.
Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό $\xi \geq 1$ *και κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*
$\mathbb{Q}^{<\infty} = \{(q_1, \ldots, q_l) : \ l \in \mathbb{N}, \ q_1 \prec \ldots \prec q_l \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\} \cup \{\emptyset\}$, *και*
$\mathbb{Q}^{\xi} = \{(q_1, \ldots, q_l) \in \mathbb{Q}^{<\infty} : \ \{\min dom^+(q_1), \ldots, \min dom^+(q_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.

Θεώρημα 2.5.7. *Έστω* $\xi \geq 1$ *αριθμήσιμος διατακτικός και οικογένεια* $G \subseteq \mathbb{Q}^{<\infty}$. *Τότε, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει συνάρτηση* $q_n : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{Q}$ *με*

$$q_n(i,j) = \sum_{t \in C_n^-} q_t^n \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t \in V_n^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C_n^+} q_t^n (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t \in V_n^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C_n^-, V_n^- \in [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $C_n^+, V_n^+ \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ *με* $C_n^- \cap V_n^- = \emptyset = C_n^+ \cap V_n^+$, $q_t^n \in \mathbb{N}$ *με* $1 \leq q_t^n \leq -t$ *για* $t \in C_n^-$, $1 \leq q_t^n \leq t$ *για* $t \in C_n^+$, *που ικανοποιούν* $q_n(i_n, j_n) \prec q_{n+1}(i_{n+1}, j_{n+1})$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *και*

$$\begin{aligned} &\text{είτε } \mathbb{Q}^\xi \cap \big[FS\big[\big(q_n(i_n,j_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big]^{<\infty}_{>0} \subseteq G, \\ &\text{ή } \mathbb{Q}^\xi \cap \big[FS\big[\big(q_n(i_n,j_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big]^{<\infty}_{>0} \subseteq \mathbb{Q}^{<\infty}\setminus G \end{aligned}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ *με* $0 \le i_n, j_n \le n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Το Θεώρημα 2.5.7 έχει την ακόλουθη πεπερασμένη μορφή.

Συμβολισμός 2.5.8. *Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό* $\xi \ge 1$ *και κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*
$\mathbb{Q}^\xi_n = \{(q_1,\dots,q_l) \in \mathbb{Q}^\xi :\ |dom(q_1)| + \ldots + |dom(q_l)| = n\}$.

Αν $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ και $k_{-n} = k_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $\widetilde{g} : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k}) \to \mathbb{Q}^{<\infty}$, με

$$\widetilde{g}((w_1,\dots,w_l)) = (g(w_1),\dots,g(w_l)) \in \mathbb{Q}^{<\infty}.$$

Πόρισμα 2.5.9. *Έστω* $\xi \ge 1$ *αριθμήσιμος διατακτικός,* $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ *με* $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ *για* $n \in \mathbb{N}$, $\upsilon \notin \Sigma$ *μεταβλητή,* $r, l \in \mathbb{N}$ *και* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ *με* $k_{-n} = k_n = n$ *για* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε, υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\xi, r, l) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε αν* $\mathbb{Q}^\xi_{n_0} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, *υπάρχει* $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_l) \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ *τέτοιο ώστε για κάποιο* $1 \le i_0 \le r$ *να ισχύει*

$$\mathbb{Q}^\xi_{n_0} \cap \widetilde{g}(\widetilde{E}^{<\infty}(\mathbf{t})) \subseteq C_{i_0}.$$

Ανάλογα με τον Ορισμό 2.2.12, ορίζουμε την αντίστοιχη έννοια στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

Ορισμός 2.5.10. *Έστω* $f : \mathbb{Q}^{<\infty} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση,* $\vec{q} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^\infty$, *όπου για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, $q_n : \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}\cup\{(0,0)\} \to \mathbb{Q}$ *με*

$$q_n(i,j) = \sum_{t\in C^-_n} q^n_t \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t\in V^-_n} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t\in C^+_n} q^n_t (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t\in V^+_n} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C^-_n, V^-_n \in [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $C^+_n, V^+_n \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ *με* $C^-_n \cap V^-_n = \emptyset = C^+_n \cap V^+_n$, $q^n_t \in \mathbb{N}$ *με* $1 \le q^n_t \le -t$ *για* $t \in C^-_n$, $1 \le q^n_t \le t$ *για* $t \in C^+_n$, *και* $\xi \ge 1$ *αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για* $y \in \mathbb{R}$ *ορίζουμε*
$\vec{q} - \xi - \lim f(x) = y \iff$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $|f((t_{n_1},\dots,t_{n_l})) - y| < \varepsilon$ *για κάθε* $(t_{n_1},\dots,t_{n_l}) \in \mathbb{Q}^\xi \cap \big[FS\big[\big(q_n(i_n,j_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big]^{<\infty}_{>0}$ *με* $\min dom^+(t_{n_1}) \ge n_0$.

Ανάλογα με το Θεώρημα 2.2.13 έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.5.11. *Έστω* $\xi \ge 1$ *αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Έστω $\mathbb{Q}^{<\infty} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r, r \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $q_n : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{Q}$ με

$$q_n(i,j) = \sum_{t \in C_n^-} q_t^n \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t \in V_n^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C_n^+} q_t^n (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t \in V_n^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C_n^-, V_n^- \in [\mathbb{Z}^-]^{\leq \omega}_{>0}$, $C_n^+, V_n^+ \in [\mathbb{N}]^{\leq \omega}_{>0}$ με $C_n^- \cap V_n^- = \emptyset = C_n^+ \cap V_n^+$, $q_t^n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq q_t^n \leq -t$ για $t \in C_n^-$, $1 \leq q_t^n \leq t$ για $t \in C_n^+$, που ικανοποιεί $q_n(i_n, j_n) \prec q_{n+1}(i_{n+1}, j_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

$$\mathbb{Q}^{\xi} \cap \left[FS\left[\left(q_n(i_n, j_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right]\right]^{<\infty}_{>0} \subseteq Q_{i_0},$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ με $0 \leq i_n, j_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$.

(2) Για κάθε $f : \mathbb{Q}^{<\infty} \to \mathbb{R}$ φραγμένη υπάρχουν $\vec{q} \in \mathbb{Q}^{\infty}$ (όπως στον Ορισμό 2.5.10) και $y \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{q} - \xi - \lim f(x) = y$.

Παρατήρηση 2.5.12. *Έχουμε ότι $\vec{q} - \xi - \lim f(x) = y \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f(q_{n_1}(i_{n_1}, j_{n_1}) + \ldots + q_{n_l}(i_{n_l}, j_{n_l})) - y| < \varepsilon$ όπου $n_1 < \ldots < n_l$, $\min dom^+(q_{n_1}(i_{n_1}, j_{n_1})) \geq n_0$ για κάθε $0 \leq i_{n_1}, j_{n_1} \leq n_1$. Άρα ισχύει ειδικότερα ότι $f(q_n(i_n, j_n)) \to y$ ομοιόμορφα για τις επιλογές των $0 \leq i_n, j_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Ανάλογα αποτελέσματα μπορούμε να διατυπώσουμε όταν $\xi = r$ πεπερασμένος ή $\xi = \omega$ (δες Παρατηρήσεις 2.2.14).

Ως πόρισμα του Θεωρήματος 2.3.14 έχουμε το ακόλουθο θεώρημα τύπου Nash-Williams για το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

Συμβολισμός 2.5.13. *Για μια ημιομάδα $(X, +)$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, θέτουμε*

$\left[FS[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]\right]^{\mathbb{N}} = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} :\ y_n \in FS[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ και $y_n < y_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$.

Θεώρημα 2.5.14. *Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{(p_n)_{n \in \mathbb{N}} :\ p_n \in \mathbb{Q}\}$ κλειστό στην τοπολογία γινόμενο θεωρώντας το $\mathbb{Q}$ με τη διακριτή τοπολογία. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $q_n : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{Q}$ με*

$$q_n(i,j) = \sum_{t \in C_n^-} q_t^n \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t \in V_n^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C_n^+} q_t^n (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t \in V_n^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C_n^-, V_n^- \in [\mathbb{Z}^-]^{\leq \omega}_{>0}$, $C_n^+, V_n^+ \in [\mathbb{N}]^{\leq \omega}_{>0}$ με $C_n^- \cap V_n^- = \emptyset = C_n^+ \cap V_n^+$, $q_t^n \in \mathbb{N}$, με $1 \leq q_t^n \leq -t$ για $t \in C_n^-$, $1 \leq q_t^n \leq t$ για $t \in C_n^+$, που ικανοποιούν $q_n(i_n, j_n) \prec q_{n+1}(i_{n+1}, j_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

$$\text{είτε } \left[FS[(q_n(i_n, j_n))_{n \in \mathbb{N}}]\right]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}, \text{ ή } \left[FS[(q_n(i_n, j_n))_{n \in \mathbb{N}}]\right]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{U}$$

για κάθε $(i_n, j_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ με $0 \leq i_n, j_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ και $k_{-n} = k_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\upsilon = 0$. Θέτουμε $\hat{g} : \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; 0) \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ με $\hat{g}((w_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (g(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Η οικογένεια $\hat{g}^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; 0)$ είναι κατά σημείο κλειστή, καθώς η συνάρτηση $\hat{g}$ είναι συνεχής. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.14, υπάρχει $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; 0)$ τέτοια ώστε

$$\text{είτε } \widetilde{EV}^\infty(\vec{w}) \subseteq \hat{g}^{-1}(\mathcal{U}), \text{ ή } \widetilde{EV}^\infty(\vec{w}) \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; 0) \setminus \hat{g}^{-1}(\mathcal{U}).$$

Από αυτό το σημείο, η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 2.5.2. □

Έστω

$$\mathbb{Q}_{[1]} = \{q \in \mathbb{Q} : \ dom^-(q) \neq \emptyset, \ dom^+(q) \neq \emptyset \text{ και } \exists\, s, r \in \mathbb{N} : \ q_{-s} = q_r = 1\}.$$

Θεωρούμε αλφάβητο $\Sigma_1 = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}\}$ και $\vec{k}_1 = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{-1,0,1\}}$ όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ και $k_{-n} = k_n = n$ για $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Περιορίζουμε τη συνάρτηση g (βλέπε σχόλια πριν από το Θεώρημα 2.5.2) στο σύνολο $\widetilde{L}(\Sigma_1, \vec{k}_1; 1)$, και έχουμε ότι $g : \widetilde{L}(\Sigma_1, \vec{k}_1; 1) \to \mathbb{Q}_{[1]}$ 1-1 και επί. Θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $\widehat{g} : \widetilde{L}^\infty(\Sigma_1, \vec{k}_1; 1) \to \mathbb{Q}^\infty_{[1]}$ (βλέπε απόδειξη Θεωρήματος 2.5.14), όπου

$$\mathbb{Q}^\infty_{[1]} = \{(q_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ q_n \in \mathbb{Q}_{[1]} \text{ και } q_n \prec q_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ορισμός 2.5.15. *Μια οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Q}^\infty_{[1]}$ από άπειρες διατεταγμένες ακολουθίες ρητών στο $\mathbb{Q}_{[1]}$ καλείτε* **πλήρως Ramsey** *αν η οικογένεια $\widehat{g}^{-1}(U)$ είναι πλήρως Ramsey οικογένεια του $\widetilde{L}^\infty(\Sigma_1, \vec{k}_1; 1)$.*

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.7 είναι ο χαρακτηρισμός των πλήρως Ramsey οικογενειών $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Q}^\infty_{[1]}$.

Θεώρημα 2.5.16. *Μια οικογένεια $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Q}^\infty_{[1]}$ είναι πλήρως Ramsey αν και μόνο αν η οικογένεια $\widehat{g}^{-1}(U)$ έχει την ιδιότητα Baire στην τοπολογία $\mathfrak{T}_E$.*

2.6 Διαμεριστικά θεωρήματα για ακολουθίες σε μια τυχαία ημιομάδα

Σε αυτή την παράγραφο εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων σε μια αυθαίρετη ημιομάδα (μεταθετική ή μη-μεταθετική). Έτσι, παίρνουμε ταυτόχρονα ισχυρές επεκτάσεις των διαμεριστικών θεωρημάτων των van der Waerden και Hindman για μια τυχαία ημιομάδα (στο Θεώρημα 2.6.3 για μια μη-μεταθετική και στο Θεώρημα 2.6.4 για μια μεταθετική ημιομάδα) επεκτείνοντας τα Θεωρήματα 14.14 και 14.15 της [HS], ένα επεκτεταμένο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό για μια τυχαία ημιομάδα (Θεώρημα 2.6.9) και ένα διαμεριστικό θεώρημα για τις άπειρες ακολουθίες μιας τυχαίας ημιομάδας (στο Θεώρημα 2.6.14 για μια μη-μεταθετική και στο Θεώρημα 2.6.15 για μια μεταθετική ημιομάδα), εφαρμόζοντας τα διαμεριστικά Θεωρήματα 2.1.2, 2.2.5 και 2.3.14 για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις αντιστοίχως.

Συμβολισμός 2.6.1. *Για $F, G \in [\mathbb{Z}]^{<\omega}_{>0}$, γράφουμε $F < G$ αν και μόνο αν μία από τις επόμενες τρεις συνθήκες ικανοποιείται:*

(1) $F \cap (\mathbb{Z}^- \cup \{0\}) = \emptyset$ *και* $\max F < \min G$,

(2) $F \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}) = \emptyset$ *και* $\min F > \max G$,

(3) $G = A_1 \cup A_2$ *όπου* $A_1, A_2 \neq \emptyset$ *και* $\max A_1 < \min F \leq \max F < \min A_2$.

Έστω $(X, +)$ ημιομάδα, $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Θέτουμε $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, όπου $\alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{Z}^*$ και $\upsilon = 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi : \widetilde{L}(\Sigma \cup \{0\}, \vec{k}) \to X \ \text{ με } \ \psi(w_{n_1} \dots w_{n_l}) = \textstyle\sum_{i=1}^{l} y_{w_{n_i}, n_i}.$$

Για $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; 0)$ θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(i,j) = \psi(T_{(1,1)}(w_{4n-3}) \star T_{(i,j)}(w_{4n-2}) \star w_{4n-1} \star T_{(1,1)}(w_{4n}))$$

για κάθε $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ με $0 \leq i \leq k_n,\ 0 \leq j \leq k_{-n}$.
Αν X είναι μεταθετική ημιομάδα,

$$u_n(i,j) = \textstyle\sum_{t\in E_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in H_n} y_{-j,t} + \sum_{t\in L_n} y_{i,t}$$

όπου $E_n \in [\mathbb{Z}]^{<\omega}_{>0},\ H_n \in [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0},\ L_n \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $E_n \cap H_n = \emptyset,\ E_n \cap L_n = \emptyset$ και $E_n < E_{n+1},\ H_n < H_{n+1},\ L_n < L_{n+1}$, και $w_t \in \{-k_t, \dots, -1, 0\}$ αν $t < 0,\ w_t \in \{0, 1, \dots, k_t\}$ αν $t > 0$.
Αν X είναι μη-μεταθετική ημιομάδα,

$$u_n(i,j) = \alpha_n(j) + \beta_n(i) \quad \text{με}$$

$$\alpha_n(j) = \textstyle\sum_{s=1}^{m_n^1}(\sum_{t\in E_s^n} y_{w_t,t} \ + \ \sum_{t\in H_s^n} y_{-j,t}) \ + \sum_{t\in E^n_{m_n^1+1}} y_{w_t,t} \quad \text{και}$$
$$\beta_n(i) = \textstyle\sum_{s=1}^{m_n^2}(\sum_{t\in D_s^n} y_{w_t,t} \ + \sum_{t\in L_s^n} y_{i,t}) \ + \sum_{t\in D^n_{m_n^2+1}} y_{w_t,t},$$

όπου $m_n^1, m_n^2 \in \mathbb{N},\ E_n = \cup_{i=1}^{m_n^1+1} E_i^n,\ H_n = \cup_{i=1}^{m_n^1} H_i^n \in [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0},\ D_n = \cup_{i=1}^{m_n^2+1} D_i^n,\ L_n = \cup_{i=1}^{m_n^2} L_i^n \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, με $E_n < E_{n+1},\ H_n < H_{n+1}, D_n < D_{n+1}, L_n < L_{n+1}$, και $w_t \in \{-k_t, \dots, -1, 0\}$ αν $t < 0,\ w_t \in \{0, 1, \dots, k_t\}$ αν $t > 0$.

Ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.2, μέσω της συνάρτησης ψ, παίρνουμε τα ακόλουθα διαμεριστικά θεωρήματα για ημιομάδες.

Συμβολισμός 2.6.2. *Έστω $(X,+)$ τυχαία ημιομάδα. Για $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ θέτουμε*

$$FS[(x_n,z_n)] = \{x_{n_l}+\ldots+x_{n_1}+z_{n_1}+\ldots+z_{n_l} :\ n_1<\ldots<n_l\in\mathbb{N}\}.$$

Θεώρημα 2.6.3. *Έστω $(X,+)$ μη-μεταθετική ημιομάδα, $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ για κάθε $l\in\mathbb{Z}$ και $\vec{k}=(k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}\subseteq\mathbb{N}$, όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}, (k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Αν $X=A_1\cup\ldots\cup A_r$ για $r\in\mathbb{N}$, τότε υπάρχει $1\le i_0\le r$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ συνάρτηση*
$u_n:\{1,\ldots,k_n\}\times\{1,\ldots,k_{-n}\}\cup\{(0,0)\}\to X\times X$ με $u_n(i,j)=\alpha_n(j)+\beta_n(i)$ και

$$\alpha_n(j) = \sum_{s=1}^{m_n^1}\Big(\sum_{t\in E_s^n} y_{w_t,t} \ +\ \sum_{t\in H_s^n} y_{-j,t}\Big) \ +\sum_{t\in E^n_{m_n^1+1}} y_{w_t,t},$$
$$\beta_n(i) = \sum_{s=1}^{m_n^2}\Big(\sum_{t\in D_s^n} y_{w_t,t} \ +\sum_{t\in L_s^n} y_{i,t}\Big) \ +\sum_{t\in D^n_{m_n^2+1}} y_{w_t,t}$$

όπου $(m_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (m_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, (H_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq[\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}, (L_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $E_n=\cup_{i=1}^{m_n^1+1}E_i^n$, $H_n=\cup_{i=1}^{m_n^1}H_i^n$, $D_n=\cup_{i=1}^{m_n^2+1}D_i^n$, $L_n=\cup_{i=1}^{m_n^2}L_i^n$ με $E_n<E_{n+1}$, $H_n<H_{n+1}$, $D_n<D_{n+1}$, $L_n<L_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $w_t\in\{-k_t,\ldots,-1,0\}$ αν $t\in\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$, $w_t\in\{0,1,\ldots,k_t\}$ αν $t\in\cup_{n\in\mathbb{N}}D_n$, που ικανοποιούν

$$FS\big[\big(\alpha_n(j_n),\beta_n(i_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big]\subseteq A_{i_0}$$

για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0\le i_n\le k_n$, $0\le j_n\le k_{-n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω $\Sigma=\{\alpha_n:\ n\in\mathbb{Z}^*\}$, όπου $\alpha_n=n$ για $n\in\mathbb{Z}^*$, $\upsilon=0$ και $\psi:\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};0)\to X$ η συνάρτηση που ορίσαμε παραπάνω. Τότε $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};0)=\psi^{-1}(A_1)\cup\ldots\cup\psi^{-1}(A_r)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.2, υπάρχει $1\le i_0\le r$ και ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ τέτοια ώστε $T_{(p_1,q_1)}(w_{n_1})\star\ldots\star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(w_{n_\lambda})\in\psi^{-1}(A_{i_0})$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{N}$, $n_1<\ldots<n_\lambda\in\mathbb{N}$, $(p_i,q_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0\le p_i\le k_{n_i}$, $0\le q_i\le k_{-n_i}$ για κάθε $1\le i\le\lambda$ και $(0,0)\in\{(p_1,q_1),\ldots,(p_\lambda,q_\lambda)\}$.

Θέτουμε $u_n(i,j)=\psi(T_{(1,1)}(w_{4n-3})\star T_{(i,j)}(w_{4n-2})\star w_{4n-1}\star T_{(1,1)}(w_{4n}))$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0\le i\le k_n$, $0\le j\le k_{-n}$. □

Στην περίπτωση μιας μεταθετικής ημιομάδας $(X,+)$, το Θεώρημα 2.6.3 έχει την ακόλουθη απλοποιημένη έκφραση.

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω $(X,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*}\subseteq X$ για κάθε $l\in\mathbb{Z}$ και $\vec{k}=(k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}\subseteq\mathbb{N}$, όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες* *ακολουθίες. Αν* $X = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ *για* $r \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχει* $1 \le i_0 \le r$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *συνάρτηση* $u_n : \{1, \ldots, k_n\} \times \{1, \ldots, k_{-n}\} \cup \{(0,0)\} \to X$ *με*

$$u_n(i,j) = \sum_{t \in E_n} y_{w_t,t} + \sum_{t \in H_n} y_{-j,t} + \sum_{t \in L_n} y_{i,t}$$

όπου $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}]^{<\omega}_{>0}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $E_n \cap H_n = \emptyset$, $E_n \cap L_n = \emptyset$, *με* $E_n < E_{n+1}$, $H_n < H_{n+1}$, $L_n < L_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *και* $w_t \in \{-k_t, \ldots, -1, 0\}$ *αν* $t < 0$, $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $w_t \in \{0, 1, \ldots, k_t\}$ *αν* $t > 0$, $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *τέτοια ώστε*

$$FS\big[\big(u_n(i_n, j_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big] \subseteq A_{i_0}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ *με* $0 \le i_n \le k_n$, $0 \le j_n \le k_{-n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Από το Θεώρημα 2.6.4 παίρνουμε τα ακόλουθα πορίσματα.

Συμβολισμός 2.6.5. *Για μια ημιομάδα* $(X, +)$ *και μια ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X$ *θέτουμε*

$$FS[(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}] = \{x_{-n_l} + \ldots + x_{-n_1} : n_1 < \ldots < n_l \in \mathbb{N}\} \text{ και}$$
$$FS[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}] = \{x_{n_1} + \ldots + x_{n_l} : n_1 < \ldots < n_l \in \mathbb{Z}\}.$$

Πόρισμα 2.6.6. *Έστω* $(X, +)$ *μεταθετική ημιομάδα και* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X$. *Αν* $X = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ *για* $r \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχουν* $1 \le i_0 \le r$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}]$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ *και* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}]$ *τέτοια ώστε*

$$FS\big[(a_n + i_n b_n + j_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}\big] \subseteq A_{i_0}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ *με* $0 \le i_n, j_n \le n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $y_{s,n} = |s| \cdot x_n$, για κάθε $s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ και $k_n = k_{-n} = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.6.4. □

Από το προηγούμενο πόρισμα έπεται άμεσα το ακόλουθο:

Πόρισμα 2.6.7. *Έστω* $(X, +)$ *μεταθετική ημιομάδα,* $X = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$ *και έστω* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X$. *Τότε υπάρχει* $1 \le i_0 \le r$ *τέτοιο ώστε: για κάθε* $l \in \mathbb{N}$ *υπάρχουν* $a \in FS((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})$, $b \in FS((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *και* $c \in FS((x_{-n})_{n\in\mathbb{N}})$ *τέτοια ώστε*

$$\bigcup_{0 \le i,j \le l-1} \{a + ib + jc\} \subseteq A_{i_0}.$$

Βεβαίως, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα πορίσματα σε γνωστές ημιομάδες μπορούμε να πάρουμε και ελαφρώς ισχυρότερα αποτελέσματα. Ως εφαρμογή των προηγουμένων, αποδεικνύουμε για την ημιομάδα $(\mathbb{Z},+)$ (εντελώς ανάλογα και για την $(\mathbb{N},+)$) ένα καλύτερο αποτέλεσμα όπως αυτό του Πορίσματος 2.6.7.

Πόρισμα 2.6.8. *Έστω $\mathbb{Z} = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ για $r \in \mathbb{N}$. Για $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$ υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοιο ώστε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $b_i \in FS((x^i_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $c_i \in FS((x^i_{-n})_{n\in\mathbb{N}})$ για $1 \leq i \leq \nu$ τέτοια ώστε*

$$\bigcup_{i=1}^{\nu}\{\alpha, \alpha+(b_i+c_i), \ldots, \alpha+l(b_i+c_i)\} \subseteq A_{i_0}.$$

Απόδειξη. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και

$y_{\rho,\, n} = \frac{|\rho|-j}{\nu} x_n^{j+1}$, όπου $|\rho| = s\nu + j,\ s \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ 0 \leq j \leq \nu-1$ για $\rho, n \in \mathbb{Z}$.

Έστω $k_n = k_{-n} = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.3, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, ακολουθίες $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, όπου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$\max E_{n+1} < \min E_n < \min H_n < \max H_n < \max E_n < \min D_n < \min L_n < \max L_n < \max D_n < \min D_{n+1}$, τέτοια ώστε για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(n) \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να έχουμε

$$FS\big[\big(\sum_{t\in E_n\cup D_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in H_n} y_{-f(n),t} + \sum_{t\in L_n} y_{f(n),t}\big)_{n\in\mathbb{N}}\big] \subseteq A_{i_0},$$

όπου, $w_t \in \{-t, \ldots, -1\}$ αν $t < 0$ και $w_t \in \{1, \ldots, t\}$ αν $t > 0$.

Για $l \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $m > (l+1)\nu - 2$ και θέτουμε $\alpha = \sum_{t\in E_m\cup D_m} y_{w_t,t}$. Για $\rho \in \{0, 1, \ldots, (l+1)\nu - 2\}$ επιλέγουμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(n) \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $f(m) = \rho + 1$. Αν $b_i = \sum_{t\in L_m} x^i_t$ και $c_i = \sum_{t\in H_m} x^i_t$ για $1 \leq i \leq \nu$, τότε

$$\alpha + j(b_i+c_i) = \sum_{t\in E_m\cup D_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in H_m} y_{-f(m),\, t} + \sum_{t\in L_m} y_{f(m),\, t} \in A_{i_0},$$

για κάθε $0 \leq j \leq l,\ 1 \leq i \leq \nu$ από το οποίο έχουμε το συμπέρασμα. □

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2.5, μέσω της συνάρτησης ψ, μπορούμε να έχουμε το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ για μια τυχαία ημιομάδα $(X,+)$, επεκτείνοντας τα Θεωρήματα 2.6.3 και 2.6.4, που αντιστοιχούν στην περίπτωση $\xi = 1$.

Θεώρημα 2.6.9. *Έστω $(X,+)$ αυθαίρετη ημιομάδα, $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός, $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ με $\alpha_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες και $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$. Για κάθε ικογένεια $G \subseteq [X]^{<\omega}_{>0}$ από πεπερασμένα υποσύνολα της X, υπάρχει $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; 0)$ τέτοια ώστε*

είτε $\{(\psi(z_1),\ldots,\psi(z_n)) \in [X]^{<\omega}_{>0} :\ (z_1,\ldots,z_n) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};0) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w})\} \subseteq G$
ή $\{(\psi(z_1),\ldots,\psi(z_n)) \in [X]^{<\omega}_{>0} :\ (z_1,\ldots,z_n) \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma,\vec{k};0) \cap \widetilde{EV}^{<\infty}(\vec{w})\} \subseteq [X]^{<\omega}_{>0} \setminus G$.

Η αντίστοιχη περίπτωση του Θεωρήματος 2.6.9 για $\xi = m$ πεπερασμένο διατακτικό αριθμό έχει την ακόλουθη μορφή στην περίπτωση μιας μη-μεταθετικής ημιομάδας.

Συμβολισμός 2.6.10. *Έστω $(X,+)$ τυχαία ημιομάδα, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ και $m \in \mathbb{N}$.*
Για $y_1 = x_{n_l}+\ldots+x_{n_1}+z_{n_1}+\ldots+z_{n_l}$, $y_2 = x_{m_\nu}+\ldots+x_{m_1}+z_{m_1}+\ldots+z_{m_\nu} \in FS[(x_n,z_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ γράφουμε $y_1 < y_2$ αν $n_l < m_1$,
$\big[FS[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big]^m = \{(y_1,\ldots,y_m) :\ y_1 < \ldots < y_m \in FS[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\}$,
$\big[FS[(x_n,z_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big]^m = \{(y_1,\ldots,y_m) :\ y_1 < \ldots < y_m \in FS[(x_n,z_n)_{n\in\mathbb{N}}]\}$,
και X^m είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X με ακριβώς m στοιχεία.

Θεώρημα 2.6.11. *Έστω $(X,+)$ μη-μεταθετική ημιομάδα, $m \in \mathbb{N}$, $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Αν $X^m = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ για $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνάρτηση*
$u_n : \{1,\ldots,k_n\}\times\{1,\ldots,k_{-n}\}\cup\{(0,0)\} \to X\times X$ με $u_n(i,j) = \alpha_n(j)+\beta_n(i)$ και

$$\alpha_n(j) = \textstyle\sum_{s=1}^{m_n^1}\big(\sum_{t\in E_s^n} y_{w_t,t}\ +\ \sum_{t\in H_s^n} y_{-j,t}\big)\ +\sum_{t\in E^n_{m_n^1+1}} y_{w_t,t},$$
$$\beta_n(i) = \textstyle\sum_{s=1}^{m_n^2}\big(\sum_{t\in D_s^n} y_{w_t,t}\ +\sum_{t\in L_s^n} y_{i,t}\big)\ +\sum_{t\in D^n_{m_n^2+1}} y_{w_t,t}$$

όπου $(m_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (m_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}, (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $E_n = \cup_{i=1}^{m_n^1+1}E_i^n$, $H_n = \cup_{i=1}^{m_n^1}H_i^n$, $D_n = \cup_{i=1}^{m_n^2+1}D_i^n$, $L_n = \cup_{i=1}^{m_n^2}L_i^n$ με $E_n < E_{n+1}$, $H_n < H_{n+1}$, $D_n < D_{n+1}$, $L_n < L_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $w_t \in \{-k_t,\ldots,-1,0\}$ αν $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$, $w_t \in \{0,1,\ldots,k_t\}$ αν $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}}D_n$, που ικανοποιούν

$$\big[FS\big[\big(\alpha_n(j_n),\beta_n(i_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big]^m \subseteq A_{i_0}$$

για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ με $0 \leq i_n \leq k_n$, $0 \leq j_n \leq k_{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Θεώρημα 2.6.11 έχει μια απλοποιημένη έκφραση στην περίπτωση που η $(X,+)$ είναι μεταθετική.

Θεώρημα 2.6.12. *Έστω $(X,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $m \in \mathbb{N}$, $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι* *αύξουσες ακολουθίες. Αν* $X^m = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ *για* $r \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχει* $1 \leq i_0 \leq r$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *συνάρτηση* $u_n : \{1, \ldots, k_n\} \times \{1, \ldots, k_{-n}\} \cup \{(0,0)\} \to X$ *με*

$$u_n(i,j) = \sum_{t \in E_n} y_{w_t,t} + \sum_{t \in H_n} y_{-j,t} + \sum_{t \in L_n} y_{i,t}$$

όπου $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}]^{<\omega}_{>0}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $E_n \cap H_n = \emptyset$, $E_n \cap L_n = \emptyset$, *με* $E_n < E_{n+1}$, $H_n < H_{n+1}$, $L_n < L_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *και* $w_t \in \{-k_t, \ldots, -1, 0\}$ *αν* $t < 0$, $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $w_t \in \{0, 1, \ldots, k_t\}$ *αν* $t > 0$, $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *τέτοια ώστε*

$$\left[FS\left[\left(u_n(i_n, j_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right]^m \subseteq A_{i_0}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ *με* $0 \leq i_n \leq k_n$, $0 \leq j_n \leq k_{-n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Ακόμα, παίρνουμε ένα διαμεριστικό θεώρημα για τις ακολουθίες σε μία αυθαίρετη ημιομάδα στο Θεώρημα 2.6.14, το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί ως η οριακή ω_1-περίπτωση του ισχυροποιημένου αποτελέσματος van der Waerden-Hindman για ημιομάδες που αποδείχθηκε στο Θεώρημα 2.6.9.

Συμβολισμός 2.6.13. *Για μια ημιομάδα* $(X, +)$ *και για ακολουθίες* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, *θέτουμε*
$\left[FS[(x_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}}]\right]^{\mathbb{N}} = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ y_n \in FS[(x_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ *και* $y_n < y_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}\}$,
$X^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ x_n \in X\}$.

Εφοδιάζουμε το σύνολο $X^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο (ισοδύναμα με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης).

Θεώρημα 2.6.14. *Έστω* $(X, +)$ *μη-μεταθετική ημιομάδα,* $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ *για κάθε* $l \in \mathbb{Z}$ *και* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ *όπου* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *και* $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι αύξουσες ακολουθίες. Αν* $\mathcal{U} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ *είναι κλειστή στην τοπολογία γινόμενο, τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει συνάρτηση*
$u_n : \{1, \ldots, k_n\} \times \{1, \ldots, k_{-n}\} \cup \{(0,0)\} \to X \times X$ *με* $u_n(i,j) = \alpha_n(j) + \beta_n(i)$ *και*

$$\alpha_n(j) = \textstyle\sum_{s=1}^{m_n^1} \left(\sum_{t\in E_s^n} y_{w_t,t} \ + \ \sum_{t\in H_s^n} y_{-j,t}\right) \ + \sum_{t\in E^n_{m_n^1+1}} y_{w_t,t},$$

$$\beta_n(i) = \textstyle\sum_{s=1}^{m_n^2} \left(\sum_{t\in D_s^n} y_{w_t,t} \ + \sum_{t\in L_s^n} y_{i,t}\right) \ + \sum_{t\in D^n_{m_n^2+1}} y_{w_t,t}$$

όπου $(m_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (m_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}, (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $E_n = \cup_{i=1}^{m_n^1+1} E_i^n$, $H_n = \cup_{i=1}^{m_n^1} H_i^n$, $D_n = \cup_{i=1}^{m_n^2+1} D_i^n$, $L_n = \cup_{i=1}^{m_n^2} L_i^n$ *με* $E_n < E_{n+1}$, $H_n < H_{n+1}$, $D_n < D_{n+1}$, $L_n < L_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *και* $w_t \in \{-k_t, \ldots, -1, 0\}$ *αν* $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $w_t \in \{0, 1, \ldots, k_t\}$ *αν* $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, *τέτοια ώστε*

$$\text{είτε } \left[FS\left[\left(\alpha_n(j_n), \beta_n(i_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U},$$
$$\text{ή } \left[FS\left[\left(\alpha_n(j_n), \beta_n(i_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right]^{\mathbb{N}} \subseteq X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{U}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ *με* $0 \leq i_n \leq k_n$, $0 \leq j_n \leq k_{-n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ με $\alpha_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$, $\upsilon = 0$ και συνάρτηση $\hat{\psi} : \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; 0) \to X^{\mathbb{N}}$ με $\hat{\psi}((w_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\psi(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Η οικογένεια $\hat{\psi}^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; 0)$ είναι κατά σημείο κλειστή, καθώς η συνάρτηση $\hat{\varphi}$ είναι συνεχής. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.14, υπάρχει $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; 0)$ τέτοια ώστε

$$\text{είτε } \widetilde{EV}^{\infty}(\vec{w}) \subseteq \hat{\psi}^{-1}(\mathcal{U}), \text{ ή } \widetilde{EV}^{\infty}(\vec{w}) \subseteq \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; 0) \setminus \hat{\psi}^{-1}(\mathcal{U}).$$

Από αυτό το σημείο, η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής του Θεωρήματος 2.6.3. □

Το Θεώρημα 2.6.14 έχει την ακόλουθη απλούστερη μορφή στην περίπτωση που η ημιομάδα $(X, +)$ είναι μεταθετική.

Θεώρημα 2.6.15. *Έστω* $(X, +)$ *μεταθετική ημιομάδα,* $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ *για κάθε* $l \in \mathbb{Z}$ *και* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ *όπου* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *και* $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ειναι αύξουσες ακολουθίες. Αν* $\mathcal{U} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ *είναι κλειστή στην τοπολογία γινόμενο, τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει συνάρτηση*
$u_n : \{1, \ldots, k_n\} \times \{1, \ldots, k_{-n}\} \cup \{(0,0)\} \to X$ *με*

$$u_n(i,j) = \sum_{t\in E_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in H_n} y_{-j,t} + \sum_{t\in L_n} y_{i,t}$$

όπου $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}]^{<\omega}_{>0}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $E_n \cap H_n = \emptyset$, $E_n \cap L_n = \emptyset$, *με* $E_n < E_{n+1}$, $H_n < H_{n+1}$, $L_n < L_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *και* $w_t \in \{-k_t, \ldots, -1, 0\}$ *αν* $t < 0$, $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $w_t \in \{0, 1, \ldots, k_t\}$ *αν* $t > 0$, $t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *τέτοια ώστε*

$$\text{είτε } \left[FS\left[\left(u_n(i_n, j_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}, \text{ ή } \left[FS\left[\left(u_n(i_n, j_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right]^{\mathbb{N}} \subseteq X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{U}$$

για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ *με* $0 \leq i_n \leq k_n$, $0 \leq j_n \leq k_{-n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Σημειώσεις. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι μπορούμε να αποδείξουμε τα ανάλογα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου για τυχαίες ημιομάδες χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα θεωρήματα για τις ω-located λέξεις.

Κεφάλαιο 3

Τοπολογικά δυναμικά συστήματα με δείκτες από λέξεις

Ο Furstenberg σε συνεργασία με τους Weiss και Katznelson στη δεκαετία του ′70 ([Fu], [FuW], [FuKa]) συνέδεσε θεμελιώδη συνδυαστικά αποτελέσματα, όπως τα διαμεριστικά θεωρήματα των van der Waerden και Hindman, με τη θεωρία των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων και ειδικότερα με φαινόμενα (πολλαπλής) επανεμφάνισης για κατάλληλες ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων ορισμένες από συμπαγή μετρικό χώρο στον εαυτό του.

Τα θεωρήματα των van der Waerden και Hindman ενοποιήθηκαν από ένα διαμεριστικό θεώρημα για λέξεις ως προς πεπερασμένο αλφάβητο από τον Carlson, το οποίο ισχυροποιήσαμε ουσιωδώς στο προηγούμενο κεφάλαιο, ορίζοντας τις έννοιες των ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων και ω-located λέξεων και αποδεικνύοντας το ακόλουθο διαμεριστικό θεώρημα για τις λέξεις αυτές:

Θεώρημα 3.0.16. *Έστω $\Sigma = \{\alpha_n \,:\, n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες, $\upsilon \notin \Sigma$ και έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$). Αν $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$ (αντίστοιχα $L(\Sigma, \vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$), $s \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $\vec{u} \prec \vec{w}$ και $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε*

$$\widetilde{E}(\vec{u}) \subseteq C_{j_0} \ \textit{(αντίστοιχα } E(\vec{u}) \subseteq C_{j_0}\textit{)}.$$

Το σημείο αφετηρίας του κεφαλαίου αυτού είναι μια ισοδύναμη τοπολογική έκφραση του προηγούμενου διαμεριστικού θεωρήματος για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις (Θεώρημα 3.1.2). Ορίζοντας την έννοια ενός δυναμικού συστήματος για συνεχείς απεικονίσεις (ομοιομορφισμούς στην πολλαπλή περίπτωση) από ένα συμπαγή μετρικό χώρο στον εαυτό του με δείκτες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις, και εφαρμόζοντας την τοπολογική ισοδύναμη έκφραση του Θεωρήματος 3.0.16, αποδεικνύουμε φαινόμενα επανεμφάνισης για αυτά τα συστήματα (Θεωρήματα 3.1.7, 3.1.16), επεκτείνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα των Birkhoff ([Bi]) και Furstenberg-Weiss ([Fu], [FuW]).

Χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των ρητών και των ακεραίων ως ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις (Παραδείγματα 3.2.1) των Budak-Işik-Pym, παίρνουμε αποτελέσματα επανεμφάνισης για δυναμικά συστήματα με δείκτες ρητούς ή ακεραίους αριθμούς (Θεωρήματα 3.2.2, 3.2.3, 3.2.5, 3.2.6). Επιπλέον, παίρνουμε αποτελέσματα επανεμφάνισης και για δυναμικά συστήματα με δείκτες τα στοιχεία μιας αυθαίρετης ημιομάδας (Θεωρήματα 3.2.10, 3.2.12).

3.1 Εφαρμογές της θεωρίας Ramsey για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Στην παράγραφο αυτή επεκτείνουμε το Θεώρημα 2.2.13 αποδεικνύοντας μια ακόμη τοπολογική ισοδύναμη έκφραση (στο Θεώρημα 3.1.2) του διαμεριστικού Θεωρήματος 3.0.16 σημαντική για να αποδείξουμε αργότερα αποτελέσματα (πολλαπλής) επανεμφάνισης για συστήματα από συνεχείς απεικονίσεις (ομοιομορφισμούς στην πολλαπλή περίπτωση) από ένα συμπαγή μετρικό χώρο στον εαυτό του με δείκτες από ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις (Θεώρημα 3.1.7), τα οποία επεκτείνουν θεμελιώδη αποτελέσματα επανεμφάνισης των Birkhoff ([Bi]) και Furstenberg-Weiss ([Fu], [FuW]).

Ορισμός 3.1.1. *Έστω αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$, όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Παρατηρούμε ότι το $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$ μπορεί να θεωρηθεί ως κατευθυνόμενο σύνολο με μερική διάταξη είτε την R_1 ή την R_2. Έτσι, σε έναν τοπολογικό χώρο X, μπορούμε να θεωρούμε το $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})} \subseteq X$ είτε ως ένα R_1-δίκτυο ή ως ένα R_2-δίκτυο στο X. Συνεπώς, το $\{x_w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα R_2-υποδίκτυο του $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$. Επιπλέον, το $\{x_w\}_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})}$ για $\vec{u} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ είναι ένα R_1-υποδίκτυο του $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ και συνεπώς το $\{x_w\}_{w\in E(\vec{u})}$ για $\vec{u} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ είναι ένα R_2-υποδίκτυο του $\{x_w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$.*
Έτω $x_0 \in X$. Γράφουμε

$$R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})} x_w = x_0$$

αν το $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ συγκλίνει στο x_0 ως R_1-δίκτυο στο X, δηλαδή αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_w \in V$ για κάθε w

με $\min\{-\max dom^-(w), \min dom^+(w)\} \geq n_0$. *Ανάλογα, γράφουμε*

$$R_2\text{-}\lim_{w\in L(\Sigma,\vec{k})} x_w = x_0$$

αν για κάθε περιοχή V *του* x_0, *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $x_w \in V$ *για κάθε* w *με* $\min dom(w) \geq n_0$.

Δίνουμε τώρα μια τοπολογική ισοδύναμη έκφραση του Θεωρήματος 3.0.16.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω* (X,d) *συμπαγής μετρικός χώρος,* $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ *αλφάβητο,* $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε οι* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι αύξουσες ακολουθίες,* $\upsilon \notin \Sigma$ *και* $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ *(αντίστοιχα* $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$*). Για κάθε δίκτυο* $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})} \subseteq X$ *(αντίστοιχα* $\{x_w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})} \subseteq X$*), υπάρχει* $\vec{u} \prec \vec{w}$ *της* $\vec{w}$ *και* $x_0 \in X$ *τέτοια ώστε*

$$R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} x_w = x_0 \ \ (\textit{αντίστοιχα } R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = x_0).$$

Απόδειξη. Για $x \in X$ και $\epsilon > 0$ θέτουμε $\widehat{B}(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \epsilon\}$. Καθώς (X,d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, έχουμε ότι $X = \bigcup_{i=1}^{m_1} \widehat{B}(x_i^1, \frac{1}{2})$ για κάποια $x_1^1,\dots,x_{m_1}^1 \in X$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.0.16, υπάρχουν $\vec{u}_1 \prec \vec{w}$ και $1 \leq i_1 \leq m_1$ τέτοια ώστε $\{x_w\}_{w\in\widetilde{E}(\vec{u}_1)} \subseteq \widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$ (αντίστοιχα $\{x_w\}_{w\in E(\vec{u}_1)} \subseteq \widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$). Ανάλογα, καθώς $\widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1^2,\dots,x_{m_2}^2 \in X$, τέτοια ώστε $\widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_2} \widehat{B}(x_i^2, \frac{1}{4})$, και συνεπώς υπάρχουν $\vec{u}_2 \prec \vec{u}_1$ και $1 \leq i_2 \leq m_2$ τέτοια ώστε $\{x_w\}_{w\in\widetilde{E}(\vec{u}_2)} \subseteq \widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2}) \cap \widehat{B}(x_{i_2}^2, \frac{1}{4})$. Επαγωγικά, κατασκευάζουμε $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ (αντίστοιχα $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$) τέτοια ώστε $\vec{u}_{n+1} \prec \vec{u}_n \prec \vec{w}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κλειστές μπάλες $\widehat{B}(x_{i_n}^n, \frac{1}{2^n})$, για $n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\{x_w\}_{w\in\widetilde{E}(\vec{u}_n)} \subseteq \textstyle\bigcap_{j=1}^n \widehat{B}(x_{i_j}^j, \frac{1}{2^j}) \text{ (αντίστοιχα}$$
$$\{x_w\}_{w\in E(\vec{u}_n)} \subseteq \textstyle\bigcap_{j=1}^n \widehat{B}(x_{i_j}^j, \frac{1}{2^j})).$$

Αν $\vec{u}_n = (w_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θέτουμε $\vec{u} = (w_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Βέβαια $\vec{u} \prec \vec{w}$. Έστω $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widehat{B}(x_{i_n}^n, \frac{1}{2^n})$. Τότε $\mathrm{R}_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} x_w = x_0$ (αντίστοιχα $\mathrm{R}_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = x_0$). Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/2^{k_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{u}_{k_0})$ έχουμε ότι $d(x_w, x_0) \leq 1/2^{k_0} < \varepsilon$. Καθώς $\widetilde{E}(\vec{u}_n) \subseteq \widetilde{E}(\vec{u}_{k_0})$ για κάθε $n \geq k_0$, έχουμε ότι $\widetilde{E}((w_n^{(n)})_{n\geq k_0}) \subseteq \widetilde{E}(\vec{u}_{k_0})$ και συνεπώς ότι $\{w \in \widetilde{E}(\vec{u}) : \min\{-\max dom^-(w), \min dom^+(w)\} \geq n_0\} \subseteq \widetilde{E}(\vec{u}_{k_0})$ για $n_0 = \max\{-\min dom^-(w_{k_0}^{(k_0)}), \max dom^+(w_{k_0}^{(k_0)})\}$. □

Παρατήρηση 3.1.3. *(1) Δείξαμε ότι το Θεώρημα 3.1.2 έπεται από το Θεώρημα 3.0.16. Αντιστρόφως, το Θεώρημα 3.0.16 έπεται από το Θεώρημα 3.1.2. Πράγματι, έστω* $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$ *(αντίστοιχα* $L(\Sigma,\vec{k}) = C_1 \cup \ldots \cup C_s$*),*

$s \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζοντας, για κάθε $w \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ (αντίστοιχα για $w \in L(\Sigma, \vec{k})$), $x_w = i$ αν και μόνο αν $w \in C_i$ και $w \notin C_j$ για κάθε $j < i$, έχουμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2, ότι υπάρχουν $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ και $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} x_w = j_0$ (αντίστοιχα $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = j_0$). Άρα για n_0 αρκετά μεγάλο και $\vec{u}_0 = (u_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $\widetilde{E}(\vec{u}_0) \subseteq C_{j_0}$ (αντίστοιχα $E(\vec{u}_0) \subseteq C_{j_0}$).

(2) Παρατηρούμε ότι αν $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} x_w = x_0$ για $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, τότε οι ακολουθίες $(x_{u_n(p_n,q_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο x_0 για κάθε ακολουθία $((p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$, $1 \leq q_n \leq k_{-n}$. Ανάλογα, αν $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = x_0$ για $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$, τότε οι ακολουθίες $(x_{u_n(p_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο x_0 για κάθε ακολουθία $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$.

(3) Ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.0.16 για λέξεις ενός πεπερασμένου αλφαβήτου, είναι το διαμεριστικό θεώρημα του Carlson ([C]), του οποίου η τοπολογική ισοδύναμη έκφραση έχει δοθεί από τους Furstenberg και Katznelson στην [FuKa].

(4) Ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.0.16 για λέξεις ενός μονοσυνόλου αλφαβήτου (έτσι, οι λέξεις μπορούν να ταυτιστούν με το πεδίο ορισμού τους) είναι το διαμεριστικό θεώρημα του Hindman στην [H]. Οι Furstenberg και Weiss στην [FuW] έδωσαν μια τοπολογική ισοδύναμη έκφραση του θεωρήματος του Hindman ορίζοντας την IP-σύγκλιση ενός δικτύου $\{x_F\}_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}}$ σε ένα τοπολογικό χώρο X στο $x_0 \in X$, αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ ώστε $x_F \in V$ για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $\min F \geq n_0$ (στην περίπτωση αυτή γράφουμε IP-$\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} x_F = x_0$) αποδεικνύοντας σημαντικά αποτελέσματα στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα (δες [Fu]).

Στην ακόλουθη πρόταση θα χαρακτηρίσουμε την R_1-σύγκλιση των δικτύων $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ και την R_2-σύγκλιση των δικτύων $\{x_w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ ως ομοιόμορφη IP-σύγκλιση, ανοίγοντας την οδό για ισχυρότερα αποτελέσματα που αφορούν την IP-σύγκλιση.

Πρόταση 3.1.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$) και $\{x_w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})} \subseteq X$ (αντίστοιχα $\{x_w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})} \subseteq X$). Για μια ακολουθία $((p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$, $1 \leq q_n \leq k_{-n}$ και $F = \{n_1 < \ldots < n_\lambda\} \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ θέτουμε $y_F^{((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}} = x_{w_{n_1}(p_{n_1},q_{n_1})\star\ldots\star w_{n_\lambda}(p_{n_\lambda},q_{n_\lambda})}$ (αντίστοιχα $y_F^{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}} = x_{w_{n_1}(p_{n_1})\star\ldots\star w_{n_\lambda}(p_{n_\lambda})}$). Τότε*

$$R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{w})} x_w = x_0 \text{ αν και μόνο αν } IP\text{-}\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} y_F^{((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}} = x_0$$

ομοιόμορφα για κάθε ακολουθία $((p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$, $1 \leq q_n \leq k_{-n}$

(αντίστοιχα R_2-$\lim_{w\in E(\vec{w})} x_w = x_0$ αν και μόνο αν IP-$\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} y_F^{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}} = x_0$ ομοιόμορφα για κάθε ακολουθία $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$).

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω V περιοχή του x_0. Υπάρχει $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_w \in V$ για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{w})$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{w})$) με $\min\{-\max dom^-(w), \min dom^+(w)\} \geq n_0$ (αντίστοιχα με $\min dom(w) \geq n_0$). Έτσι, για $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $n_0 < \min F$ έχουμε ότι $y_F^{((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}} \in V$ (αντίστοιχα $y_F^{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in V$) για κάθε ακολουθία $((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$, $1 \leq q_n \leq k_{-n}$ (αντίστοιχα $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$).

($\Leftarrow$) Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u_n = w_{m_1^n}(p_{m_1^n}, q_{m_1^n}) \star \ldots \star w_{m_\lambda^n}(p_{m_\lambda^n}, q_{m_\lambda^n}) \in \widetilde{E}(\vec{w})$ (αντίστοιχα $u_n = w_{m_1^n}(p_{m_1^n}) \star \ldots \star w_{m_\lambda^n}(p_{m_\lambda^n}) \in E(\vec{w})$) με $\min\{-\max dom^-(u_n), \min dom^+(u_n)\} \geq n$ (αντίστοιχα $\min dom(u_n) \geq n$) και $x_{u_n} \notin V$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n <_{R_1} u_{n+1}$ (αντίστοιχα $u_n <_{R_2} u_{n+1}$) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $y_F^{((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}} \in V$ (αντίστοιχα $y_F^{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in V$) για κάθε ακολουθία $((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$, $1 \leq q_n \leq k_{-n}$ (αντίστοιχα $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq p_n \leq k_n$) και κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $\min F \geq n_0$. Τότε $x_{u_{n_0}} \in V$, αντίφαση. □

Θα δώσουμε τώρα κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 3.1.2 στα τοπολογικά συστήματα επεκτείνοντας θεμελιώδη αποτελέσματα επανεμφάνισης του Birkhoff ([Bi]) και των Furstenberg-Weiss ([FuW], [Fu]). Πρώτα, θα ορίσουμε τις έννοιες των $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-συστημάτων και $L(\Sigma,\vec{k})$-συστημάτων από συνεχείς απεικονίσεις ενός τοπολογικού χώρου στον εαυτό του.

Ορισμός 3.1.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Μια οικογένεια $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$) από συνεχείς απεικονίσεις από το X στον εαυτό του είναι ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-**σύστημα** (αντίστοιχα ένα $L(\Sigma,\vec{k})$-**σύστημα**) του X αν $T^{w_1}T^{w_2} = T^{w_1\star w_2}$ για $w_1 <_{R_1} w_2$ (αντίστοιχα για $w_1 <_{R_2} w_2$).*

Παραδείγματα 3.1.6. *Έστω X τοπολογικός χώρος.*

(1) Έστω $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Για να ένα αλφάβητο $\Sigma = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ μια αύξουσα ακολουθία και $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε για κάθε $w = w_{n_1}\ldots w_{n_\lambda} \in L(\Sigma,\vec{k})$

$$T^w = T^{l_{n_1}w_{n_1}+\ldots+l_{n_\lambda}w_{n_\lambda}}.$$

Τότε το $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα $L(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα του X.
Ακόμα, για μια ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από συνεχείς απεικονίσεις από το X στον εαυτό του ορίζοντας

$$T^w = T_{n_1}^{l_{n_1} w_{n_1}} \dots T_{n_\lambda}^{l_{n_\lambda} w_{n_\lambda}}.$$

έχουμε άλλο ένα $L(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα του X.

(2) Για μια δοσμένη ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ από συνεχείς απεικονίσεις από το X στον εαυτό του, $\Sigma = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες και $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε για $w = w_{n_1} \dots w_{n_\lambda} \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$

$$T^{w_{n_1} \dots w_{n_\lambda}} = T_{n_1}^{l_{n_1} w_{n_1}} \dots T_{n_\lambda}^{l_{n_\lambda} w_{n_\lambda}}.$$

Τότε το $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα του X.
Ειδικότερα, αν $T, S : X \to X$ είναι δύο συνεχείς απεικονίσεις, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την T_n με την T^n και την T_{-n} με την S^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μέσω του Θεωρήματος 3.1.2, θα αποδείξουμε την ύπαρξη ισχυρά recurrent σημείων σε ένα μετρικό χώρο X για ένα $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα καθώς και για ένα $L(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα αυτού. Ακόμα, θα δείξουμε έναν τρόπο να βρίσκουμε τέτοια σημεία.

Θεώρημα 3.1.7. *Έστω $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$) ένα $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα (αντίστοιχα $L(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα) ενός μετρικού χώρου (X, d), $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$) και $x \in X$. Τότε υπάρχει μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$R_1\text{-} \lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x) = x_0 \ \ (\textit{αντίστοιχα} \ \ R_2\text{-} \lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x) = x_0).$$

*Επιπλέον, το x_0 είναι $\vec{w}$-**recurrent** σημείο, με την έννοια ότι*

$$R_1\text{-} \lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0 \ \ (\textit{αντίστοιχα} \ \ R_2\text{-} \lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 υπάρχουν μια extraction $\vec{u}$ της $\vec{w}$ και ένα $x_0 \in X$ τέτοια ώστε

$\mathrm{R}_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x) = x_0$ (αντίστοιχα $\mathrm{R}_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x) = x_0$).

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(T^w(x), x_0) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{u})$ με $\min\{-\max dom^-(w), \min dom^+(w)\} \geq n_0$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{u})$ με $\min dom(w) \geq n_0$). Έστω $w \in \widetilde{E}(\vec{u})$ με $\min\{-\max dom^-(w), \min dom^+(w)\}$ $\geq n_0$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{u})$ με $\min dom(w) \geq n_0$). Τότε $d(T^w(x), x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Καθώς T^w είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(z, x_0) < \delta$, τότε $d(T^w(z), T^w(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}$. Επιλέγουμε $w_1 \in \widetilde{E}(\vec{u})$ (αντίστοιχα $w_1 \in E(\vec{u})$) τέτοιο ώστε $d(T^{w_1}(x), x_0) < \delta$ και $w <_{R_1} w_1$ (αντίστοιχα $w <_{R_2} w_1$). Τότε $d(T^w(T^{w_1}(x)), T^w(x_0)) = d(T^{w\star w_1}(x), T^w(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}$. Καθώς $d(T^{w\star w_1}(x), x_0)$ $< \frac{\epsilon}{2}$ έχουμε ότι $d(T^w(x_0), x_0) < \epsilon$. $\square$

Στα ακόλουθα πορίσματα θα περιγράψουμε κάποιες συνέπειες του Θεωρήματος 3.1.7 για το απλούστερο $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$-σύστημα που παράγεται από έναν μόνο μετασχηματισμό.

Πόρισμα 3.1.8. *Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση και $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $m_n < m_{n+1}, r_n < r_{n+1}$ για $n \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in X$ και ακολουθίες $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS((m_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$ τέτοιες ώστε*

$$IP\text{-}\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} T^{\sum_{n\in F}\alpha_n+p_n\beta_n+q_n\gamma_n}(x_0) = x_0,$$

(ειδικότερα, $\lim_n T^{\alpha_n+p_n\beta_n+q_n\gamma_n}(x_0) = x_0$) ομοιόμορφα για κάθε ακολουθία $((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $0 \le p_n \le n$, $0 \le q_n \le n$.

Απόδειξη. Έστω $\Sigma = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ με $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ με $k_{-n} = k_n = n+1$ για $n \in \mathbb{N}$. Για $w = w_{n_1}\dots w_{n_\lambda} \in \widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$ θέτουμε $T^{w_{n_1}\dots w_{n_\lambda}} = T^{-n_1 w_{n_1}}\dots T^{-n_i w_{n_i}} T^{n_{i+1}w_{n_{i+1}}}\dots T^{n_\lambda w_{n_\lambda}}$, όπου $n_i = \max dom^-(w)$, $n_{i+1} = \min dom^+(w)$. Τότε το $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα του X (δες Παράδειγμα 3.1.6(2)). Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ με $w_n = w_{-r_n}w_{m_n}$ όπου $w_{-r_n} = w_{m_n} = \upsilon$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.1.7. Έτσι, υπάρχουν μια extraction $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ της $\vec{w}$ και ένα $x_0 \in X$ τέτοια ώστε $\mathrm{R}_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0$.
Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.4, αν $y_F^{((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}} = T^{u_{n_1}(p_{n_1},q_{n_1})\star\dots\star u_{n_\lambda}(p_{n_\lambda},q_{n_\lambda})}(x_0)$, τότε

$$\text{IP-}\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} y_F^{((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}} = x_0$$

ομοιόμορφα για κάθε ακολουθία $((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \le p_n \le n+1$, $1 \le q_n \le n+1$.

Έστω $T^{u_n((p_n,q_n))} = T^{\alpha_n+(p_n-1)\beta_n+(q_n-1)\gamma_n}$, όπου $\beta_n \in FS((m_n)_{n\in\mathbb{N}})$ και $\gamma_n \in FS((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Τότε $\text{IP-}\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} T^{\sum_{n\in F}\alpha_n+p_n\beta_n+q_n\gamma_n}(x_0) = x_0$, (ειδικότερα, $\lim T^{\alpha_n+p_n\beta_n+q_n\gamma_n}(x_0) = x_0$) ομοιόμορφα για κάθε ακολουθία $((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $0 \le p_n \le n$, $0 \le q_n \le n$. □

Πόρισμα 3.1.9. *Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση και $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $m_n < m_{n+1}, r_n < r_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και ακολουθίες $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS((m_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$ τέτοιες ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί*

$$d(T^{p_n\beta_n+q_n\gamma_n}(T^{\alpha_n}(x_0)), T^{\alpha_n}(x_0)) < \epsilon$$

για κάθε $n \ge n_0$ και $((p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $0 \le p_n \le n$, $0 \le q_n \le n$.

Απόδειξη. Έπεται από το Πόρισμα 3.3.2. □

Θα ορίσουμε τώρα τα recurrent υποσύνολα ενός μετρικού χώρου X για ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα καθώς και για ένα $L(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα αυτού.

Ορισμός 3.1.10. *Έστω $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$) ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα (αντίστοιχα $L(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα) από συνεχείς απεικονίσεις ενός μετρικού χώρου (X,d) και $\vec{w}\in\widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w}\in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$). Ένα κλειστό υποσύνολο A του X καλείται $\vec{w}$-**recurrent σύνολο** αν για κάθε $m\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$ και κάθε σημείο $x\in A$ υπάρχει $y\in A$ και $u\in\widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u),\min dom^+(u)\}>m$ (αντίστοιχα $u\in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u)\}>m$) τέτοια ώστε $d(T^{u(p,q)}(y),x)<\varepsilon$ για κάθε $1\le p,q\le m$.*

Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε μια μέθοδο για την εύρεση recurrent υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X ενός δοσμένου $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$- συστήματος όπως και ενός δοσμένου $L(\Sigma,\vec{k})$-συστήματος αυτού.

Παράδειγμα 3.1.11. *Έστω (X,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $F(X)$ το σύνολο όλων των μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X εφοδιασμένο με τη μετρική Hausdorff $\hat{d}$*

(όπου $\hat{d}(A,B)=\max[\sup_{x\in A}d(x,B),\ \sup_{x\in B}d(x,A)]$).

Τότε ο $(F(X),\hat{d})$ είναι επίσης συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα (αντίστοιχα $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ ένα $L(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα) συνεχών συναρτήσεων του (X,d). Ορίζουμε $\hat{T}^w:F(X)\to F(X)$ με $\hat{T}^w(A)=T^w(A)$. Τότε το $\{\hat{T}^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα (αντίστοιχα το $\{\hat{T}^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ είναι ένα $L(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα) του $(F(X),\hat{d})$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.7, για κάθε $\vec{w}=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w}=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$) υπάρχουν $A\in F(X)$ και μια extraction $\vec{u}\prec\vec{w}$ της $\vec{w}$ τέτοια ώστε

$$R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})}\hat{T}^w(A)=A\ \ (\textit{αντίστοιχα}\ \ R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})}\hat{T}^w(A)=A).$$

Τότε το A είναι $\vec{w}$-recurrent στο (X,d). Παρατηρήστε ότι είναι αρκετό να ισχύει $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})}\hat{T}^w(A)\supseteq A$ (αντίστοιχα $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})}\hat{T}^w(A)\supseteq A$) για να είναι το A $\vec{w}$-recurrent.

Πρόταση 3.1.12. *Έστω A ένα $\vec{w}$-recurrent υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d). Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ και $m\in\mathbb{N}$ υπάρχουν $u\in\widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u),\ \min dom^+(u)\}>m$ (αντίστοιχα $u\in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u)>m$) και $z\in A$ τέτοια ώστε*

$$d(T^{u(p,q)}(z),z)<\varepsilon\ \ \textit{για κάθε}\ 1\le p,q\le m.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Για $z_0 \in A$ και $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ υπάρχουν $z_1 \in A$ και $u_1 \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u_1), \min dom^+(u_1)\} > m$ (αντίστοιχα $u_1 \in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u) > m$) τέτοια ώστε $d(T^{u_1(p,q)}z_1, z_0) < \varepsilon$ για κάθε $1 \le p, q \le m$.

Έστω ότι έχουμε επιλέξει $z_0, z_1, \ldots, z_r \in A$, $u_1 <_{R_1} \ldots <_{R_1} u_r \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ (αντίστοιχα $u_1 <_{R_2} \ldots <_{R_2} u_r \in EV(\vec{w})$) τέτοια ώστε

$$d(T^{u_i(p_i,q_i)\star\ldots\star u_j(p_j,q_j)}(z_j), z_{i-1}) < \varepsilon/2$$

για κάθε $1 \le i \le j \le r$ και $1 \le p_l, q_l \le m$, για κάθε $i \le l \le j$.

Καθώς οι T^w είναι συνεχείς απεικονίσεις, υπάρχει $\varepsilon_r < \varepsilon/2$ έτσι ώστε αν $d(z, z_r) < \varepsilon_r$ τότε $d(T^{u_i(p_i,q_i)\star\ldots\star u_r(p_r,q_r)}(z), z_{i-1}) < \varepsilon/2$ για κάθε $1 \le i \le r$ και $1 \le p_l, q_l \le m$, για κάθε $i \le l \le r$. Καθώς το A είναι $\vec{w}$-recurrent, υπάρχουν $z_{r+1} \in A$ και $u_{r+1} \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ με $u_r <_{R_1} u_{r+1}$ (αντίστοιχα $u_{r+1} \in EV(\vec{w})$ με $u_r <_{R_2} u_{r+1}$) τέτοια ώστε $d(T^{u_{r+1}(p,q)}(z_{r+1}), z_r) < \varepsilon_r$ για κάθε $1 \le p, q \le m$. Συνεπώς, $d(T^{u_i(p_i,q_i)\star\ldots\star u_{r+1}(p_{r+1},q_{r+1})}(z_{r+1}), z_{i-1}) < \varepsilon/2$ για κάθε $1 \le i \le r+1$ και $1 \le p_l, q_l \le m$, για κάθε $i \le l \le r+1$.

Καθώς ο (X, d) είναι συμπαγής, υπάρχουν $i < j \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $d(z_i, z_j) < \varepsilon/2$. Συνεπώς, για $u = u_{i+1}\star\ldots\star u_j \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ (αντίστοιχα $u = u_{i+1}\star\ldots\star u_j \in EV(\vec{w})$) έχουμε ότι $d(T^{u(p,q)}z_j, z_j) < \varepsilon$ για κάθε $1 \le p, q \le m$. $\square$

Ορισμός 3.1.13. *Ένα κλειστό υποσύνολο A ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X είναι* **ομογενές** *ως προς ένα σύνολο μετασχηματισμών $\{T_i\}$ που δρουν στο X αν υπάρχει μια ομάδα ομοιομορφισμών G του X κάθε στοιχείο της οποίας μετατίθενται με κάθε T_i και έτσι ώστε η G αφήνει το A αναλλοίωτο και (A, G) είναι ελαχιστικό (κανένα γνήσιο κλειστό υποσύνολο του A δεν είναι αναλλοίωτο ως προς τη δράση της G).*

Στην ακόλουθη πρόταση δίνουμε μια ικανή συνθήκη ώστε ένα ομογενές υποσύνολο να είναι ισχυρά recurrent.

Πρόταση 3.1.14. *Έστω A ομογενές σύνολο στο συμπαγή μετρικό χώρο X ως προς το σύστημα $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$) και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$). Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x, y \in A$ και $u \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u), \min dom^+(u)\} > m$ (αντίστοιχα $u \in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u)\} > m$) τέτοια ώστε $d(T^{u(p,q)}(y), x) < \varepsilon$ για κάθε $1 \le p, q \le m$, τότε το A είναι $\vec{w}$-recurrent.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, και G ομάδα ομοιομορφισμών που μετατίθενται με τους $\{T^w\}$, τέτοια ώστε η δράση της G αφήνει το A αναλλοίωτο με (A, G) ελαχιστικό. Έστω $\{U_1, \ldots, U_r\}$ ένα πεπερασμένο κάλυμμα του A από ανοικτά σύνολα διαμέτρου $< \varepsilon/2$. Τότε, από την ελαχιστικότητα του A, μπορούμε να βρούμε για κάθε $1 \le i \le r$ ένα πεπερασμένο σύνολο $\{g_1^i, \ldots, g_1^{l_i}\} \subseteq G$ τέτοιο ώστε $\bigcup_{j=1}^{l_i}(g_j^i)^{-1}(U_i) = A$. Έστω $G_0 = \{g_j^i : 1 \le i \le r, 1 \le j \le l_i\} \subseteq G$. Τότε για κάθε $x, y \in A$ έχουμε $\min_{g\in G_0} d(g(x), y) < \varepsilon/2$.

Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(x_1, x_2) < \delta$, τότε $d(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon$ για κάθε $g \in G_0$. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, υπάρχουν $x, y \in A$ και $u \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u),\ \min dom^+(u)\} > m$ (αντίστοιχα $u \in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u) > m$) τέτοια ώτσε $d(T^{u(p,q)}(y), x) < \delta$ για κάθε $1 \le p, q \le m$. Τότε
$d(T^{u(p,q)}(g(y)), g(x)) = d(g(T^{u(p,q)}(y)), g(x)) < \varepsilon/2$ για κάθε $1 \le p, q \le m$.
Για ένα $z \in A$, βρίσκουμε $g \in G_0$ με $d(g(x), z) < \varepsilon/2$. Τότε $d(T^{u(p,q)}(g(y)), z)$ $\le d(T^{u(p,q)}(g(y)), g(x)) + d(g(x), z) < \varepsilon$ για κάθε $1 \le p, q \le m$. Έπεται ότι το A είναι $\vec{w}$-recurrent. □

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ένα recurrent ομογενές υποσύνολο A ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X περιέχει recurrent σημεία και ότι τα σημεία αυτά αποτελούν ένα πυκνό υποσύνολο του A.

Πρόταση 3.1.15. *Έστω $\{T^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ ένα $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα (αντίστοιχα $\{T^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$ ένα $L(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα) από συνεχείς απεικονίσεις ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X, d) και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$). Ένα $\vec{w}$-recurrent ομογενές υποσύνολο A του X περιέχει $\vec{w}$-recurrent σημεία (το x_0 είναι $\vec{w}$-**recurrent** αν και μόνο αν R_1-$\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0$ (αντίστοιχα αν και μόνο αν R_2-$\lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0$) για κάποιο $\vec{u} \prec \vec{w}$).*

Επιπλέον, τα $\vec{w}$-recurrent σημεία του A αποτελούν ένα πυκνό υποσύνολο του A.

Απόδειξη. Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $V \cap A \ne \emptyset$ και $V' \subseteq V$ ανοικτό σύνολο ώστε $V' \cap A \ne \emptyset$ και αν $d(x, V') < \delta$ για $\delta > 0$ τότε $x \in V$. Καθώς το A είναι ομογενές, υπάρχει ομάδα G ομοιομορφισμών που μετατίθενται με τους $\{T^w\}$ ώστε η δράση της G αφήνει το A αναλλοίωτο με (A, G) ελαχιστικό. Από την ελαχιστικότητα του A, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $G_0 \subseteq G$ τέτοιο ώστε $A \subseteq \bigcup_{g\in G_0} g^{-1}(V')$.

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε οποτεδήποτε $x_1, x_2 \in X$ και $d(x_1, x_2) < \varepsilon$, τότε $d(g(x_1), g(x_2)) < \delta$ για κάθε $g \in G_0$. Καθώς το A είναι $\vec{w}$-recurrent, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.12, για $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $z \in A$ και $u \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u), \min dom^+(u)\} > m$ (αντίστοιχα $u \in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u) > m$) τέτοια ώστε $d(T^{u(p,q)}(z), z) < \varepsilon$ για κάθε $1 \le p, q \le m$.

Υπάρχει $g \in G_0$ με $g(z) \in V'$ και καθώς $d(T^{u(p,q)}(g(z)), g(z)) < \delta$ για κάθε $1 \le p, q \le m$, έχουμε ότι $T^{u(p,q)}(g(z)) \in V$ για κάθε $1 \le p, q \le m$. Συνεπώς, κάθε ανοικτό σύνολο V με $V \cap A \ne \emptyset$ περιέχει σημείο $z' = g(z) \in A$ με $T^{u(p,q)}z' \in V$ για κάθε $1 \le p, q \le m$. Καθώς οι T^w είναι συνεχείς, συμπεραίνουμε ότι για κάθε ανοικτό σύνολο V με $V \cap A \ne \emptyset$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$

υπάρχει ανοικτό σύνολο V_1 τέτοιο ώστε $\overline{V_1} \subseteq V$ και $T^{u(p,q)}V_1 \subseteq V$ για κάθε $1 \leq p, q \leq m$, για κάποιο $u \in \widetilde{EV}(\vec{w})$ με $\min\{-\max dom^-(u), \min dom^+(u)\} > m$ (αντίστοιχα $u \in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u) > m$).

Έστω V_0 ανοικτό υποσύνολο του X με $V_0 \cap A \neq \emptyset$. Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών συνόλων και ακολουθία $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$) με $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοιες ώστε $\overline{V_n} \subseteq V_{n-1}$, $V_n \cap A \neq \emptyset$ και $T^{u_n(p_n,q_n)}V_n \subseteq V_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq p_n \leq k_n$, $1 \leq q_n \leq k_{-n}$. Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι η διάμετρος των V_n τείνει στο 0. Τότε $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap A = \{x_0\}$.

Για $1 < i_1 < \ldots < i_k$, έχουμε ότι $T^{u_{i_1}(p_{i_1},q_{i_1})\star\ldots\star u_{i_k}(p_{i_k},q_{i_k})}V_{i_k} \subseteq V_{i_1-1}$. Τότε $T^w(x_0) \in V_i$ για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{u})$ με $u_{i+1} <_{R_1} w$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{u})$ με $u_{i+1} <_{R_2} w$) έτσι R_1- $\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0$ (αντίστοιχα R_2-$\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w(x_0)$ $= x_0$). Συνεπώς, το $x_0 \in A \cap V_0$ είναι ένα $\vec{w}$-recurrent σημείο. Η ίδια η απόδειξη μας δίνει ότι το σύνολο των $\vec{w}$-recurrent στοιχείων του A είναι πυκνό στο A. □

Τώρα, θα αποδείξουμε ένα πολλαπλό θεώρημα επανεμφάνισης επεκτείνοντας το Θεώρημα 3.1.7, στην περίπτωση που οι μετασχηματισμοί ειναι ομοιομορφισμοί. Μπορούμε να πούμε ότι το ακόλουθο θεώρημα είναι το ανάλογο αποτέλεσμα του πολλαπλής επανεμφάνησης θεωρήματος του Birkhoff για λέξεις.

Θεώρημα 3.1.16. *Έστω $\{T_1^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}, \ldots, \{T_m^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T_1^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}, \ldots, \{T_m^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$), m συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G από ομοιομορφισμούς του X και έστω $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} \in L^\infty(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$). Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε*

$$R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T_i^w(x_0) = x_0 \ (\textit{αντίστοιχα } R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T_i^w(x_0) = x_0) \textit{ για κάθε } 1 \leq i \leq m.$$

Επιπλέον, στην περίπτωση που το (X, G) είναι ελαχιστικό, το σύνολο των σημείων x_0 είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι το (X, G) είναι ελαχιστικό, διαφορετικά αντικαθηστούμε το X με ένα G-ελαχιστικό υποσύνολο του X. Για $m = 1$ παίρνουμε το αποτέλεσμα από το Θεώρημα 3.1.7. Προχωράμε επαγωγικά. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $m \in \mathbb{N}$ και ότι $\{T_1^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}, \ldots, \{T_{m+1}^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T_1^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}, \ldots, \{T_{m+1}^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$) είναι $m+1$ συστήματα. Θέτουμε $S_i^w = T_i^w(T_{m+1}^w)^{-1}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Τότε $S_i^{w_1\star w_2} = S_i^{w_1}S_i^{w_2}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ και $w_1 <_{R_1} w_2$ (αντίστοιχα $w_1 <_{R_2} w_2$), καθώς όλες οι απεικονίσεις μετατίθενται. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $y \in X$ και $\vec{u} \prec \vec{w}$

τέτοια ώστε R_1-$\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} S_i^w(y) = y$ (αντίστοιχα R_2-$\lim_{w\in E(\vec{u})} S_i^w(y) = y$) για κάθε $1 \leq i \leq m$.

Θεωρούμε το γινόμενο X^{m+1} και έστω Δ^{m+1} το διαγώνιο σύνολο που αποτελείται από $(m+1)$-άδες $(x,\ldots,x) \in X^{m+1}$. Ταυτίζοντας κάθε $g \in G$ με το $g \times \ldots \times g$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G δρα στο X^{m+1}. Ακόμα, οι συναρτήσεις $T_1^w \times \ldots \times T_{m+1}^w$ δρουν στο X^{m+1} και μετατίθενται με της συναρτήσεις της G. Καθώς η G αφήνει το Δ^{m+1} αναλλοίωτο και το (Δ^{m+1}, G) είναι ελαχιστικό, το Δ^{m+1} είναι ομογενές σύνολο. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.15, αρκεί να αποδείξουμε ότι το Δ^{m+1} είναι $\vec{w}$-recurrent. Αλλά, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.14 αυτό είναι σωστό καθώς R_1-$\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})}(T_1^w \times \ldots \times T_{m+1}^w)[((T_{m+1}^w)^{-1} \times \ldots \times (T_{m+1}^w)^{-1})((y,\ldots,y))] = (y,\ldots,y)$ (αντίστοιχα R_2-$\lim_{w\in E(\vec{u})}(T_1^w \times \ldots \times T_{m+1}^w)[((T_{m+1}^w)^{-1} \times \ldots \times (T_{m+1}^w)^{-1})((y,\ldots,y))] = (y,\ldots,y)$). □

Το Θεώρημα 3.1.16 έχει την ακόλουθη συνέπεια.

Πρόταση 3.1.17. *Έστω $\{T_1^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})},\ldots,\{T_m^w\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ (αντίστοιχα $\{T_1^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})},\ldots,\{T_m^w\}_{w\in L(\Sigma,\vec{k})}$), m συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G από ομοιομορφισμούς του X, που δρα ελαχιστικά στο X. Για $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} \in L^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$) και U μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ έτσι ώστε*

$$\bigcap_{i=1}^{m}(T_i^w)^{-1}(U) \neq \emptyset \quad \text{για κάθε} \quad w \in \widetilde{E}(\vec{u}) \quad (\text{αντίστοιχα } w \in E(\vec{u})).$$

Απόδειξη. Καθώς η G δρα ελαχιστικά στο X, έχουμε $X = \bigcup_{g\in G_0} g^{-1}(U)$, όπου G_0 είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο της G. Έστω $\delta > 0$ ώστε κάθε σύνολο διαμέτρου $< \delta$ περιέχεται σε κάποιο $g^{-1}(U)$ για $g \in G_0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.16, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε R_1-$\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T_i^w(x_0) = x_0$ (αντίστοιχα R_2-$\lim_{w\in E(\vec{u})} T_i^w(x_0) = x_0$) για κάθε $1 \leq i \leq m$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\vec{u}$ είναι τέτοια ώστε $d(T_i^w(x_0), x_0) < \delta/2$ για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{u})$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{u})$) και $1 \leq i \leq m$. Τότε υπάρχει $g \in G_0$ τέτοιο ώστε $T_i^w(x_0) \in g^{-1}(U)$ για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{u})$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{u})$) και $1 \leq i \leq m$. Συνεπώς, $g(x_0) \in \bigcap_{i=1}^m (T_i^w)^{-1}(U)$ για κάθε $w \in \widetilde{E}(\vec{u})$ (αντίστοιχα $w \in E(\vec{u})$). □

Στη συνέχεια θα δούμε μια εφαρμογή των προηγούμενων στους χώρους Hilbert. Θα δουλέψουμε σε $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-συστήματα που παράγονται από unitary τελεστές (φυσικά, τα εντελώς ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για $L(\Sigma,\vec{k})$-συστήματα).

Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και ότι το $\{T^w\}$ είναι ένα unitary $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα στον $\mathcal{H}$. Κάθε κλειστή μπάλα $B_R = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq R\}$ είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος στην ασθενή τοπολογία και το $\{T^w\}$ δρα στην B_R ως ένα σύστημα ομοιομορφισμών. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ βρίσκουμε $\vec{u}_x \prec \vec{w}$ ώστε το $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u}_x)} T^w x$ να υπάρχει (η σύγκλιση είναι στην ασθενή τοπολογία του $\mathcal{H}$).

Αν $\{x_n\}_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, μπορούμε να βρούμε (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.2 για το συμπαγή μετρικό χώρο $\prod\mathcal{H}$) $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοιο ώστε $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w x_n$ να υπάχει για κάθε n. Αν το $\{x_n\}_n$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$ στην ισχυρή τοπολογία, τότε το $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$. Ο P είναι ένας γραμμικός τελεστής (τετριμμένο) και (όπως θα δούμε στο Θεώρημα 3.1.18) είναι ορθογώνια προβολή.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.7, αν για κάθε $x \in X$ έχουμε $T^w x \to Px$, τότε ο μετασχηματισμός όριο P ικανοποιεί τη σχέση $P^2 = P$.

Θεώρημα 3.1.18. *Αν το $\{T^w\}$ είναι ένα unitary $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-σύστημα ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$, τότε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοιο ώστε $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T^w = P$ ασθενώς. Ο P είναι ορθογώνια προβολή σε υπόχωρο του $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο P είναι ορθογώνια προβολή. Αν $T^w x \to Px$ ασθενώς για κάθε x, τότε $(T^w)^* y \to P^* y$ ασθενώς για κάθε y. $T^w x \to x$ ασθενώς $\Leftrightarrow <T^w x, x> \to \|x\|^2 \Leftrightarrow <x,(T^w)^* x> \to \|x\|^2 \Leftrightarrow (T^w)^* x \to x$ ασθενώς. Έπεται ότι $P\mathcal{H} = P^*\mathcal{H}$. Αν $x \perp P\mathcal{H} = P^*\mathcal{H}$ τότε $<Px,y> = <x,P^*y> = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, έτσι $Px = 0$. □

Θεώρημα 3.1.19. *Έστω $\{T_1^w\},\ldots,\{T_l^w\}$, l unitary $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-συστήματα που μετατίθενται σε χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και $\vec{w} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$. Αν $T_i^w \to P_i$ ασθενώς, τότε οι προβολές P_i μετατίθενται. Επιπλέον αν για κάποιο $\vec{u} \prec \vec{w}$ το R_1-$\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{u})} T_1^w \ldots T_l^w$ υπάρχει, τότε το όριο είναι προβολή, η εικόνα του οποίου περιέχει την $P_1 \ldots P_l\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Έστω $l = 2$ (η γενική περίπτωση έπεται από επαγωγή). Υποθέτουμε ότι $R_1\text{-}\lim_w T_1^w = P_1$, $R_1\text{-}\lim_w T_2^w = P_2$ και ότι $R_1\text{-}\lim_w T_1^w T_2^w = R$ ασθενώς. Έστω $x \in \mathcal{H}$ με $x = P_1 x = P_2 x$. Αρκεί να δείξουμε ότι $Rx = x$. Καθώς $\|T_1^w x - x\|^2 = 2\|x\|^2 - 2 <T_1^w x, x> \to 0$ έχουμε ότι $| <T_1^w T_2^w x, y> - <x,y> | \leq \|T_1^w x - x\|\|y\| + | <T_2^w x, y> - <x,y> | \to 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$. □

3.2 Περαιτέρω εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή, θα δείξουμε πως τα αποτελέσματα επανεμφάνισης για τοπολογικά συστήματα ή δίκτυα με δείκτες από λέξεις, που αποδείχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, μπορούν να εφαρμοστούν σε συστήματα ή δίκτυα με δείκτες από ημιομάδες τα στοιχεία των οποίων αναπαρίστανται ως λέξεις (Παραδείγματα 3.2.1) και συνεπώς και σε συστήματα ή δίκτυα με δείκτες σε τυχαία ημιομάδα.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε διαμεριστικά θεωρήματα κυρίως για την ημιομάδα $(\mathbb{Q},+)$ τα στοιχεία της οποίας αναπαρίστανται ως ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις, και αναφέραμε ότι μπορούμε να έχουμε ανάλογα αποτελέσματα για τυχαίες ημιομάδες τα στοιχεία των οποίων αναπαρίστανται ως ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις ή ω-located λέξεις.

Παραδείγματα 3.2.1. *(1) Σύμφωνα με τους Budak-Işik-Pym στην [BIP], κάθε μη-μηδενικός ρητός αριθμός q έχει μοναδική έκφραση στη μορφή*

$$q = \sum_{s=1}^{\infty} q_{-s}\frac{(-1)^s}{(s+1)!} \ + \ \sum_{r=1}^{\infty} q_r(-1)^{r+1}r!$$

όπου $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $0 \leq q_{-s} \leq s$ για κάθε $s > 0$, $0 \leq q_r \leq r$ για κάθε $r > 0$ και $q_{-s} = q_r = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα r, s. Θέτοντας $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{Z}^*\}$, όπου $\alpha_{-n} = \alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$, και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, όπου $k_{-n} = k_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση

$$g^{-1} : \mathbb{Q}^* \to \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}),$$

που στέλνει το q στη λέξη $w = q_{t_1} \dots q_{t_l} \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$, όπου $\{t_1, \dots, t_l\} = \{t \in \mathbb{Z}^* : q_t \neq 0\}$, είναι 1-1 και επί.

(2) Σύμφωνα με την [BIP], για δοσμένη αύξουσα ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $k_n \geq 2$, κάθε μη-μηδενικός ακέραιος αριθμός $z \in \mathbb{Z}$ έχει μοναδική έκφραση της μορφής

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} z_s(-1)^{s-1}l_{s-1}$$

όπου $l_0 = 1$, $l_s = k_1 \dots k_s$, για $s \in \mathbb{N}$ και $(z_s)_{s\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $0 \leq z_s \leq k_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$ και $z_s = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα s. Θέτοντας $\Sigma = \{\alpha_n :\ n \in \mathbb{N}\}$, όπου $\alpha_n = n$, και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνάρτηση

$$g^{-1} : \mathbb{Z}^* \to L(\Sigma, \vec{k}),$$

που στέλνει το z στη λέξη $w = z_{s_1} \dots z_{s_t} \in L(\Sigma, \vec{k})$, όπου $\{s_1, \dots, s_t\} = \{s \in \mathbb{N} : z_s \neq 0\}$, είναι 1-1 και επί.

(3) Για δοσμένο φυσικό αριθμό $k > 1$, κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδική έκφραση της μορφής

$$n = \sum_{s=1}^{\infty} n_s k^{s-1}$$

όπου $(n_s)_{s\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq n_s \leq k-1$ και $n_s = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα s. Θέτοντας $\Sigma = \{1, \ldots, k-1\}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $k_n = k-1$ η συνάρτηση

$$g^{-1} : \mathbb{N} \to L(\Sigma, \vec{k}),$$

που στέλνει το n στη λέξη $w = n_{s_1} \ldots n_{s_l} \in L(\Sigma, \vec{k})$, όπου $\{s_1, \ldots, s_l\} = \{s \in \mathbb{N} : n_s \neq 0\}$, είναι 1-1 και επί.

(4) Έστω p πρώτος αριθμός (δεν υπάρχει γνήσιος διαιρέτης του p διάφορος του 1). Η ομάδα $\mathbb{Z}(p^\infty)$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών q που γράφονται μοναδικά στη μορφή

$$q = \sum_{t=1}^{\infty} d_t p^{-t}$$

όπου $(d_t)_{t\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq d_t \leq p-1$ για κάθε $t > 0$ και $d_t = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα t. Θέτοντας $\Sigma = \{1, \ldots, p-1\}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $k_n = p-1$ η συνάρτηση

$$g^{-1} : \mathbb{Z}(p^\infty) \to L(\Sigma, \vec{k}),$$

που στέλνει το q στη λέξη $w = d_{s_1} \ldots d_{s_l} \in L(\Sigma, \vec{k})$, όπου $\{s_1, \ldots, s_l\} = \{s \in \mathbb{N} : d_s \neq 0\}$, είναι 1-1 και επί.

Ημιομάδα $(\mathbb{Q}, +)$.

Όπως περιγράφτηκε στο Παράδειγμα 3.2.1(1), το σύνολο $\mathbb{Q}^*$ των μη μηδενικών ρητών αριθμών μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ των ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεων, μέσω της συνάρτησης

$$g : \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{Q}^*, \text{ με}$$
$$g(q_{t_1} \ldots q_{t_l}) = \textstyle\sum_{t\in dom^-(w)} q_t \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t\in dom^+(w)} q_t (-1)^{t+1} t!.$$

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση g στο σύνολο $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ των λέξεων με μεταβλητή αντιστοιχώντας σε κάθε $w = q_{t_1} \ldots q_{t_l} \in \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ μια συνάρτηση $q = g(w)$ η οποία στέλνει κάθε $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq -\max dom^-(w)$, $1 \leq j \leq \min dom^+(w)$, στο $q(i, j) = g(T_{(j,i)}(w)) =$

$$= \sum_{t\in C^-} q_t \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + i \sum_{t\in V^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t\in C^+} q_t (-1)^{t+1} t! + j \sum_{t\in V^+} (-1)^{t+1} t!,$$

όπου $C^- = \{t \in dom^-(w) : \ q_t \in \Sigma\}$, $V^- = \{t \in dom^-(w) : \ q_t = \upsilon\}$ και $C^+ = \{t \in dom^+(w) : \ q_t \in \Sigma\}$, $V^+ = \{t \in dom^+(w) : \ q_t = \upsilon\}$. Έστω $\mathbb{Q}(\upsilon) = g(\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))$. Τότε η επεκτεταμένη συνάρτηση

$$g : \widetilde{L}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}) \to \mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q}(\upsilon)$$

είναι 1-1 και επί. Για $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q}(\upsilon)$ ορίζουμε τη σχέση

$$q_1 <_{R_1} q_2 \iff g^{-1}(q_1) <_{R_1} g^{-1}(q_2).$$

Έτσι, το $\{x_q\}_{q\in\mathbb{Q}^*} \subseteq X$, όπου ο X είναι τοπολογικός χώρος, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα R_1-δίκτυο και συνεπώς, ορίζουμε για $x_0 \in X$, $R_1\text{-}\lim_{q\in\mathbb{Q}^*} x_q = x_0$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_q \in V$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}^*$ με $\min\{-\max dom^-(g^{-1}(q)), \min dom^+(g^{-1}(q))\} \geq n_0$.

Παρατηρούμε ότι $g(w_1 \star w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ για κάθε $w_1 <_{R_1} w_2 \in \widetilde{L}(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k})$. Έτσι, αν

$\vec{q} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^\infty(\upsilon) = \{(q_n)_{n\in\mathbb{N}} : q_n \in \mathbb{Q}(\upsilon) \text{ και } q_n <_{R_1} q_{n+1}\}$,

τότε το σύνολο των extractions της $\vec{q}$ είναι

$\widetilde{EV}^\infty(\vec{q}) = \{\vec{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^\infty(\upsilon) : r_n = g(u_n) \text{ για } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{EV}^\infty((g^{-1}(q_n))_{n\in\mathbb{N}})\}$

και το σύνολο των extracted ρητών της $\vec{q}$ είναι

$$\widetilde{E}(\vec{q}) = \{q \in FS[(q_n(i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}}] : ((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ με } 1 \leq i_n, j_n \leq n\} =$$
$$= \{g(w) : w \in \widetilde{E}((g^{-1}(q_n))_{n\in\mathbb{N}})\}.$$

Βέβαια, το $\{x_q\}_{q\in\widetilde{E}(\vec{q})}$ είναι ένα R_1-υποδίκτυο του $\{x_q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$.

Συνεπώς, μέσω της συνάρτησης g, όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις, δίνουν ανάλογα αποτελέσματα για ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα τα Θεωρήματα 3.1.2 και 3.1.16 δίνουν τα ακόλουθα:

Θεώρημα 3.2.2. *Για κάθε δίκτυο $\{x_q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$ σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο (X, d) και $\vec{q} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^\infty(\upsilon)$ υπάρχουν extraction $\vec{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{q}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$R_1\text{-}\lim_{q\in FS[(r_n(i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}]} x_q = x_0 \ (\textit{ειδικότερα } x_{r_n(i_n,j_n)} \to x_0),$$

ομοιόμορφα για κάθε $((i_n, j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $1 \leq i_n, j_n \leq n$.

Καλούμε την οικογένεια $\{T^q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$ από συνεχείς συναρτήσεις ενός τοπολογικού χώρου X στον εαυτό του $\mathbb{Q}^*$-**σύστημα** του X αν $T^{q_1}T^{q_2} = T^{q_1+q_2}$ για $q_1 <_{R_1} q_2$.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $\{T_1^q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}, \ldots, \{T_m^q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$ m $\mathbb{Q}^*$-συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X, τα οποία περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G από ομοιομορφισμούς του X και έστω $\vec{q} \in \mathbb{Q}^\infty(\upsilon)$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και μια extraction $\vec{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{q}$ τέτοια ώστε, για κάθε $1 \leq i \leq m$,*

$$R_1\text{-}\lim_{q\in FS[(r_n(i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}]} T_i^q(x_0)=x_0 \text{ (ειδικότερα, } T_i^{r_n(i_n,j_n)}(x_0)\to x_0\text{)},$$

ομοιόμορφα για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *με* $1\le i_n,j_n\le n$.

Επιπλέον, στην περίπτωση που το (X,G) *είναι ελαχιστικό, το σύνολο αυτών των σημείων* x_0 *είναι πυκνό υποσύνολο του* X.

Ημιομάδα $(\mathbb{Z},+)$.

Όπως περιγράψαμε στο Παράδειγμα 3.2.1(2), για μια δοσμένη αύξουσα ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ με $k_n\ge 2$, το σύνολο $\mathbb{Z}^*$ των μη μηδενικών ακεραίων μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $L(\Sigma,\vec{k})$ των ω-located λέξεων, μέσω της συνάρτησης

$$g: L(\Sigma,\vec{k})\to\mathbb{Z}^*, \text{ με } g(z_{s_1}\dots z_{s_l})=\textstyle\sum_{i=1}^{l} z_{s_i}(-1)^{s_i-1}l_{s_i-1}$$

όπου $l_0=1$ και $l_s=k_1\dots k_s$, για $s>0$.

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση g στο σύνολο $L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ των ω-located λέξεων με μεταβλητή αντιστοιχώντας σε κάθε $w=z_{s_1}\dots z_{s_l}\in L(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ μια συνάρτηση $z=g(w)$ που στέλνει κάθε $i\in\mathbb{N}$ με $1\le i\le k_{\min dom(w)}$, στο

$$z(i)=g(T_i(w))=\textstyle\sum_{s\in C} z_s(-1)^{s-1}l_{s-1}+\sum_{s\in V} i(-1)^{s-1}l_{s-1}.$$

όπου $C=\{s\in dom(w): z_s\in\Sigma\}$ και $V=\{s\in dom(w):\ z_s=\upsilon\}$.

Έστω $\mathbb{Z}(\upsilon)=g(L(\Sigma,\vec{k};\upsilon))$. Τότε η επεκτεταμένη συνάρτηση

$$g: L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})\to\mathbb{Z}^*\cup\mathbb{Z}(\upsilon)$$

είναι 1-1 και επί. Για $z_1,z_2\in\mathbb{Z}^*\cup\mathbb{Z}(\upsilon)$ ορίζουμε τη διάταξη

$$z_1<_{R_2} z_2 \iff g^{-1}(z_1)<_{R_2} g^{-1}(z_2).$$

Έτσι, το $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}^*}\subseteq X$, όπου X είναι τοπολογικός χώρος, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα R_2-δίκτυο και συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε, για $x_0\in X$, $R_2\text{-}\lim_{z\in\mathbb{Z}^*} x_z=x_0$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $n_0\equiv n_0(V)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_z\in V$ για κάθε $z\in\mathbb{Z}^*$ με $\min dom(g^{-1}(z))\ge n_0$.

Παρατηρούμε ότι $g(w_1\star w_2)=g(w_1)+g(w_2)$ για κάθε $w_1<_{R_2} w_2\in L(\Sigma\cup\{\upsilon\},\vec{k})$. Έτσι, αν

$\vec{z}=(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^\infty(\upsilon)=\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}}: z_n\in\mathbb{Z}(\upsilon) \text{ και } z_n<_{R_2} z_{n+1}\}$,
τότε το σύνολο των extractions της $\vec{z}$ είναι το
$EV^\infty(\vec{z})=\{\vec{v}=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^\infty(\upsilon): v_n=g(u_n) \text{ για } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in EV^\infty((g^{-1}(z_n))_{n\in\mathbb{N}})\}$
και το σύνολο όλων των extracted ακεραίων της $\vec{z}$ είναι το
$E(\vec{z})=\{z\in FS[(z_n(i_n))_{n\in\mathbb{N}}]: (i_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N} \text{ με } 1\le i_n\le k_n\}=$

$$=\{g(w): w\in E((g^{-1}(z_n))_{n\in\mathbb{N}})\}.$$

Βέβαια, το $\{x_z\}_{z\in E(\vec{z})}$ είναι ένα R_2-υποδίκτυο του $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}^*}$.

Ανάλογα με το Θεώρημα 2.5.2 έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω $\mathbb{Z} = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ για $r \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια συνάρτηση $p_n : \{0,1,\ldots,k_n\} \to \mathbb{Z}$ με*

$$p_n(i) = \sum_{t\in C_n} n_t^n(-1)^{t+1}(k_1+1)\ldots(k_{t-1}+1)+i\sum_{t\in V_n}(-1)^{t+1}(k_1+1)\ldots(k_{t-1}+1),$$

όπου $C_n, V_n \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $C_n \cap V_n = \emptyset$, $n_t^n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq n_t^n \leq k_t$ για $t \in C_n$, που ικανοποιούν $p_n(i_n) <_{R_2} p_{n+1}(i_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

$$FS\big[\big(p_n(i_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big] \subseteq Z_{i_0}$$

για κάθε $0 \leq i_n \leq k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μέσω της συνάρτησης g, όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου για ω-located λέξεις δίνουν ανάλογα αποτελέσματα στους ακεραίους. Για παράδειγμα, τα Θεωρήματα 3.1.2 και 3.1.7 δίνουν τα ακόλουθα.

Θεώρημα 3.2.5. *Για κάθε δίκτυο $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}^*}$ σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο (X,d), και $\vec{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\infty(\upsilon)$ υπάρχουν μια extraction $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{z}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$R_2\text{-}\lim_{z\in FS[(v_n(i_n))_{n\in\mathbb{N}}]} x_z = x_0 \text{ (ειδικότερα } x_{v_n(i_n)} \to x_0),$$

ομοιόμορφα για κάθε $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq i_n \leq k_n$.

Καλούμε μια οικογένεια $\{T^z\}_{z\in\mathbb{Z}^*}$ από συνεχείς απεικονίσεις από ένα τοπολογικό χώρο X στον εαυτό του $\mathbb{Z}^*$-**σύστημα** του X αν $T^{z_1}T^{z_2} = T^{z_1+z_2}$ για $z_1 <_{R_2} z_2$.

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω $\{T^z\}_{z\in\mathbb{Z}^*}$ ένα $\mathbb{Z}^*$-σύστημα από συνεχείς απεικονίσεις ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d), $\vec{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\infty(\upsilon)$ και $y \in X$. Τότε υπάρχουν μια extraction $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{z}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$R_2\text{-}\lim_{z\in FS[(v_n(i_n))_{n\in\mathbb{N}}]} T^z(y) = x_0,\ R_2\text{-}\lim_{z\in FS[(v_n(i_n))_{n\in\mathbb{N}}]} T^z(x_0) = x_0$$

ομοιόμορφα για κάθε $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \leq i_n \leq k_n$.

Ημιομάδα $(\mathbb{N},+)$.

Όπως περιγράφτηκε στο Παράδειγμα 3.2.1(3), για δοσμένο φυσικό αριθμό $p \geq 2$, θεωρώντας $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $k_n = p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών μπορεί να ταυτιστεί με ένα σύνολο $L(\Sigma,\vec{k})$ από ω-located λέξεις, μέσω της συνάρτησης

$$g : L(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{N}, \text{ με } g(n_{t_1} \dots n_{t_l}) = \sum_{i=1}^{l} n_{t_i} p^{t_i - 1}.$$

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση g στο σύνολο $L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ των ω-located λέξεων με μεταβλητή αντιστοιχώντας σε κάθε $w = n_{t_1} \dots n_{t_l} \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ μια συνάρτηση $n = g(w)$ που στέλνει κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq p-1$, στο

$$n(i) = g(T_i(w)) = \sum_{t \in C} n_t p^{t-1} + \sum_{t \in V} i p^{t-1}.$$

όπου $C = \{t \in dom(w) : n_t \in \Sigma\}$ και $V = \{t \in dom(w) : \ n_t = \upsilon\}$.

Έστω $\mathbb{N}(\upsilon) = g(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))$. Τότε η επεκτεταμένη συνάρτηση

$$g : L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}) \to \mathbb{N} \cup \mathbb{N}(\upsilon)$$

είναι 1-1 και επί. Για $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}(\upsilon)$ ορίζουμε τη διάταξη

$$n_1 <_{R_2} n_2 \iff g^{-1}(n_1) <_{R_2} g^{-1}(n_2).$$

Ανάλογα με το Θεώρημα 2.5.2 έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω $\mathbb{N} \cup \{0\} = N_1 \cup \ldots \cup N_r$ για $r \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνάρτηση $p_n : \{0, 1, \dots, p-1\} \to \mathbb{N}$ με*

$$p_n(i) = \sum_{t \in C_n} n_t^n p^{t-1} + i \sum_{t \in V_n} p^{t-1},$$

όπου $C_n, V_n \in [\mathbb{N}]_{>0}^{<\omega}$ με $C_n \cap V_n = \emptyset$, $n_t^n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq n_t^n \leq p-1$ για $t \in C_n$, που ικανοποιούν $p_n(i_n) <_{R_2} p_{n+1}(i_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

$$FS\big[\big(p_n(i_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}\big] \subseteq N_{i_0}$$

για κάθε $0 \leq i_n \leq p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μέσω της συνάρτησης g, όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου για ω-located λέξεις δίνουν ανάλογα αποτελέσματα επανεμφάνησης στους φυσικούς.

Ημιομάδα $(\mathbb{Z}(p^\infty), +)$.

Όπως περιγράφτηκε στο Παράδειγμα 3.2.1(4), για δοσμένο πρώτο αριθμό p, θεωρώντας $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $k_n = p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο των μη μηδενικών στοιχείων της $\mathbb{Z}(p^\infty)$ μπορεί να ταυτιστεί με ένα σύνολο $L(\Sigma, \vec{k})$ από ω-located λέξεις, μέσω της συνάρτησης

$$g : L(\Sigma, \vec{k}) \to \mathbb{Z}(p^\infty), \text{ με } g(n_{t_1} \dots n_{t_l}) = \sum_{i=1}^{l} n_{t_i} p^{-t_i}.$$

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση g στο σύνολο $L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ των ω-located λέξεων με μεταβλητή αντιστοιχώντας σε κάθε $w = n_{t_1} \dots n_{t_l} \in L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ μια συνάρτηση $q = g(w)$ που στέλνει κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq p-1$, στο

$$q(i) = g(T_i(w)) = \textstyle\sum_{t \in C} n_t p^{t-1} + \sum_{t \in V} i p^{t-1}.$$

όπου $C = \{t \in dom(w) : n_t \in \Sigma\}$ και $V = \{t \in dom(w) : \ n_t = \upsilon\}$.

Έστω $\mathbb{Z}(p^\infty)(\upsilon) = g(L(\Sigma, \vec{k}; \upsilon))$. Τότε η επεκτεταμένη συνάρτηση

$$g : L(\Sigma \cup \{\upsilon\}, \vec{k}) \to \mathbb{Z}(p^\infty)^* \cup \mathbb{Z}(p^\infty)$$

είναι 1-1 και επί. Για $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}(p^\infty)^* \cup \mathbb{Z}(p^\infty)$ ορίζουμε τη διάταξη

$$q_1 <_{R_2} q_2 \iff g^{-1}(q_1) <_{R_2} g^{-1}(q_2).$$

Ανάλογα με το Θεώρημα 2.5.2 έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2.8. *Έστω $\mathbb{Z}(p^\infty) = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ για $r \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνάρτηση $p_n : \{0, 1, \ldots, p-1\} \to \mathbb{Z}(p^\infty)$ με*

$$p_n(i) = \sum_{t \in C_n} n_t^n p^{-t} + i \sum_{t \in V_n} p^{-t},$$

όπου $C_n, V_n \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $C_n \cap V_n = \emptyset$, $n_t^n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq n_t^n \leq p-1$ για $t \in C_n$, που ικανοποιούν $p_n(i_n) <_{R_2} p_{n+1}(i_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

$$FS\big[\big(p_n(i_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}\big] \subseteq Z_{i_0}$$

για κάθε $0 \leq i_n \leq p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μέσω της συνάρτησης g, όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου για ω-located λέξεις δίνουν ανάλογα αποτελέσματα επανεμφάνισης στο σύνολο $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Σημειώσεις 3.2.9. *Παρατηρούμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε για τις ημιομάδες $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{N}, +)$ και $(\mathbb{Z}(p^\infty), +)$ εντελώς ανάλογα αποτελέσματα με τα Θεωρήματα 3.1.18 και 3.1.19.*

Τυχαία Ημιομάδα

Θα δώσουμε τώρα μερικές εφαρμογές των προηγουμένων αποτελεσμάτων επανεμφάνισης για συστήματα ή δίκτυα με δείκτες από λέξεις σε συστήματα ή δίκτυα με δείκτες από τυχαία ημιομάδα. Για λόγους απλότητας παρουσιάζουμε μόνο την περίπτωση των μεταθετικών ημιομάδων.

Έστω $(S, +)$ ημιομάδα και $(y_{l,n})_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq S$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}^*$. Θέτοντας $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$, όπου $\alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{Z}^*$ και $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$, όπου $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : \widetilde{L}(\Sigma, \vec{k}) \to S \ \text{ με } \ \varphi(w_{n_1} \ldots w_{n_m}) = \textstyle\sum_{i=1}^m y_{w_{n_i}, n_i}.$$

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση φ στο σύνολο $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ των λέξεων με μεταβλητή αντιστοιχώντας σε κάθε $w = w_{n_1}\dots w_{n_m} \in \widetilde{L}(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ μια συνάρτηση $s = \varphi(w)$ που στέλνει κάθε $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq j \leq -\max dom^-(w)$, $1 \leq i \leq \min dom^+(w)$, στο $s(i,j) = \varphi(T_{(i,j)}(w)) \in S$. Στην περίπτωση που $(S,+)$ είναι μεταθετική ημιομάδα

$$s(i,j) = \varphi(w)((i,j)) = \textstyle\sum_{t\in C} y_{w_t,t} + \sum_{t\in V^+} y_{i,t} + \sum_{t\in V^-} y_{-j,t},,$$

όπου $C = \{n \in dom(w) : w_n \in \Sigma\}$, $V^- = \{n \in dom^-(w) : w_n = \upsilon\}$ και $V^+ = \{n \in dom^+(w) : w_n = \upsilon\}$.

Για ένα υποσύνολο $\{x_s : s \in S\}$ ενός τοπολογικού χώρου X, μπορούμε να θεωρούμε το R_1-δίκτυο $\{x_{\varphi(w)}\}_{w\in\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})}$ του X. Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{L}^\infty(\Sigma,\vec{k};\upsilon)$ τέτοιο ώστε $R_1\text{-}\lim_{w\in\widetilde{E}(\vec{w})} x_{\varphi(w)} = x_0$, για $x_0 \in X$. Τότε θέτοντας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{gathered} s_n = \varphi(w_n) : \{1,\dots,k_n\}\times\{1,\dots,k_{-n}\} \to X \text{ με} \\ s_n(i,j) = \textstyle\sum_{t\in C_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in V_n^+} y_{i,t} + \sum_{t\in V_n^-} y_{-j,t}, \end{gathered}$$

έχουμε ότι

$$R_1\text{-}\lim_{s\in FS[(s_n(i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}]} x_s = x_0$$

ομοιόμορφα για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq i_n \leq k_n$, $1 \leq j_n \leq k_{-n}$. Γράφουμε $R_1\text{-}\lim_{s\in FS[(s_n(i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}]} x_s = x_0$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_s \in V$ για κάθε $s \in FS\big[\big(s_n(i_n,j_n)\big)_{n\geq n_0}\big]$.

Συνεπώς, μέσω της συνάρτησης φ, όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε για ω-$\mathbb{Z}^*$-located λέξεις δίνουν ανάλογα αποτελέσματα για δίκτυα με δείκτες από μια τυχαία ημιομάδα. Για παράδειγμα τα Θεωρήματα 3.1.2 και 3.1.16 δίνουν τα ακόλουθα.

Θεώρημα 3.2.10. *Έστω $(S,+)$ μια μεταθετική ημιομάδα και $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq S$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}^*$. Για κάθε υποσύνολο $\{x_s : s \in S\}$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d) υπάρχει $x_0 \in X$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συναρτήσεις $s_n : \{1,\dots,k_n\}\times\{1,\dots,k_{-n}\} \to X$ με*

$$s_n(i,j) = \textstyle\sum_{t\in C_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in V_n^+} y_{i,t} + \sum_{t\in V_n^-} y_{-j,t},$$

όπου $C_n = C_n^- \cup C_n^+ \subseteq \mathbb{Z}^*$ με $\max C_{n+1}^- < \min C_n^- < \max C_n^+ < \min C_{n+1}^+$, $V_n^+ \subseteq \mathbb{N}$ με $\max V_n^+ < \min V_{n+1}^+$ και $V_n^- \subseteq \mathbb{Z}^-$ με $\min V_n^- > \max V_{n+1}^-$, τέτοιες ώστε

$$R_1\text{-}\lim_{s\in FS[(s_n(i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}]} x_s = x_0 \ \textit{(ειδικότερα } x_{s_n(i_n,j_n)} \to x_0\textit{)},$$

ομοιόμορφα για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \leq i_n \leq k_n$, $1 \leq j_n \leq k_{-n}$.

Πόρισμα 3.2.11. *Έστω $(S,+)$ μια μεταθετική ημιομάδα και $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq S$. Για κάθε υποσύνολο $\{x_s : s \in S\}$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d) και επεικονίσεις $p,q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}]$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ και $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}]$ τέτοιες ώστε*

$$R_1\text{-}\lim_{s\in FS[(a_n+p(i_n)b_n+q(j_n)c_n)_{n\in\mathbb{N}}]} x_s = x_0$$

(ειδικότερα $x_{a_n+p(i_n)b_n+q(j_n)c_n} \to x_0$) ομοιόμορφα για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \le i_n, j_n \le n$.

Απόδειξη. Θέτουμε $y_{l,n} = p(l)y_n$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $y_{l,n} = q(-l)y_n$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}^-$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.10. □

Έστω $(S,+)$ μια μεταθετική ημιομάδα και $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq S$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}^*$. Καλούμε μια οικογένεια $\{T^s\}_{s\in S}$ από συνεχείς συναρτήσεις ενός τοπολογικού χώρου X στον εαυτό του, $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-**σύστημα** του S αν $T^{\varphi(w_1)}T^{\varphi(w_2)} = T^{\varphi(w_1\star w_2)}$ για $w_1 <_{R_1} w_2 \in \widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$.

Θεώρημα 3.2.12. *Έστω $(S,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq S$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}^*$ και $\{T_1^s\}_{s\in S}, \ldots, \{T_m^s\}_{s\in S}$, m $\widetilde{L}(\Sigma,\vec{k})$-συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X, τα οποία περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του X. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συναρτήσεις $s_n : \{1,\ldots,k_n\} \times \{1,\ldots,k_{-n}\} \to X$ με*

$$s_n(i,j) = \textstyle\sum_{t\in C_n} y_{w_t,t} + \sum_{t\in V_n^+} y_{i,t} + \sum_{t\in V_n^-} y_{-j,t},$$

όπου $C_n = C_n^- \cup C_n^+ \subseteq \mathbb{Z}^*$ με $\max C_{n+1}^- < \min C_n^- < \max C_n^+ < \min C_{n+1}^+$, $V_n^+ \subseteq \mathbb{N}$ με $\max V_n^+ < \min V_{n+1}^+$ και $V_n^- \subseteq \mathbb{Z}^-$ με $\min V_n^- > \max V_{n+1}^-$, τέτοιες ώστε

$$R_1\text{-}\lim_{s\in FS[(s_n(i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}}]} T_i^s(x_0) = x_0 \text{ για κάθε } 1 \le i \le m,$$

ομοιόμορφα για κάθε $((i_n,j_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $1 \le i_n \le k_n$, $1 \le j_n \le n$.

Επιπλέον, στην περίπτωση που το (X,G) είναι ελαχιστικό, το σύνολο των σημείων x_0 είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X.

Παρατήρηση 3.2.13. *Αντίστοιχα, για $(S,+)$ ημιομάδα και $(y_{l,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$, θέτοντας $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $\alpha_n = n$ για $n \in \mathbb{N}$ και $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ αύξουσα ακολουθία, ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\varphi : L(\Sigma,\vec{k}) \to S \;\text{ με }\; \varphi(w_{n_1}\ldots w_{n_m}) = \textstyle\sum_{i=1}^m y_{w_{n_i},n_i}$$

και παίρνουμε τα ανάλογα αποτελέσματα για συστήματα ή δίκτυα με δείκτες σε τυχαία ημιομάδα χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις ω-located λέξεις.

3.3 Επεκτεταμένα θεωρήματα επανεμφάνισης

Θα ασχοληθούμε τώρα με δίκτυα $\{x_{\mathbf{w}}\}$ με δείκτες από $\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$ (αντίστοιχα $\mathbf{w} \in L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$) για αριθμήσιμους διατακτικούς $\xi \geq 1$, τα οποία καλούμε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-**δίκτυα** (αντίστοιχα $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-**δίκτυα**). Αν περιορίσουμε την $\mathbf{w}$ στο σύνολο $\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \cap \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$ για μια $\vec{u} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $E^{<\infty}(\vec{u}) \cap L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$ για μια $\vec{u} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$) λαμβάνουμε πάλι ένα $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-δίκτυο $\{x_{\mathbf{w}}\}_{\mathbf{w} \in \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \cap \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})}$ (αντίστοιχα ένα $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-δίκτυο $\{x_{\mathbf{w}}\}_{\mathbf{w} \in E^{<\infty}(\vec{u}) \cap L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})}$), το οποίο καλούμε $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-**υποδίκτυο** (αντίστοιχα $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-**υποδίκτυο**).

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $\xi \geq 1$ ένας αριθμήσιμος διατακτικός, $\{x_{\mathbf{w}}\}_{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})}$ ένα $\widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-δίκτυο (αντίστοιχα $\{x_{\mathbf{w}}\}_{\mathbf{w} \in L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})}$ ένα $L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})$-δίκτυο) από σημεία σε ένα τοπολογικό χώρο X, και έστω $x_0 \in X$. Το x_0 είναι το R_1-**όριο** του $\{x_{\mathbf{w}}\}$, και γράφουμε $R_1\text{-}\lim_{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})} x_{\mathbf{w}} = x_0$ (αντίστοιχα το R_2-**όριο** του $\{x_{\mathbf{w}}\}$ και γράφουμε $R_2\text{-}\lim_{\mathbf{w} \in L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})} x_{\mathbf{w}} = x_0$), αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $n_0 \equiv n_0(V) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_{(w_{n_1}, \ldots, w_{n_k})} \in V$ για κάθε $(w_{n_1}, \ldots, w_{n_k})$ με $\min\{-\max dom^{-}(w_{n_1}), \min dom^{+}(w_{n_1})\} \geq n_0$ (αντίστοιχα $\min dom(w_{n_1}) \geq n_0$).*

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός, $\Sigma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}^*\}$ αλφάβητο, $\upsilon \notin \Sigma$ μια μεταβλητή, $\vec{w} \in \widetilde{L}^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$ (αντίστοιχα $\vec{w} \in L^{\infty}(\Sigma, \vec{k}; \upsilon)$) και $\vec{k} = (k_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσες ακολουθίες. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Αν $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ (αντίστοιχα $L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = A_1 \cup \ldots \cup A_r$), $r \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ και $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοια ώστε $\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \cap \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \subseteq A_{i_0}$ (αντίστοιχα $E^{<\infty}(\vec{u}) \cap L^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \subseteq A_{i_0}$).

(2) Για κάθε $\{x_{\mathbf{w}}\}_{\mathbf{w} \in \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})} \subseteq X$ (αντίστοιχα $\{x_{\mathbf{w}}\}_{\mathbf{w} \in L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})} \subseteq X$), όπου (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχουν $\vec{u} \prec \vec{w}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε

$$R_1\text{-}\lim_{\mathbf{w} \in \widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}) \cap \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k})} x_{\mathbf{w}} = x_0 \quad (\textit{αντίστοιχα } R_2\text{-}\lim_{\mathbf{w} \in E^{<\infty}(\vec{u}) \cap L^{\xi}(\Sigma, \vec{k})} x_{\mathbf{w}} = x_0).$$

Απόδειξη. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $x_{(\cdot)} : \widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) \to X$. Καθώς X είναι συμπαγής, έχουμε ότι $X = \bigcup_{i=1}^{m_1} \widehat{B}(x_i^1, \frac{1}{2})$ για κάποια $x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1 \in X$, έτσι, $\widetilde{L}^{<\infty}(\Sigma, \vec{k}) = \bigcup_{i=1}^{m_1} x_{(\cdot)}^{-1}(\widehat{B}(x_i^1, \frac{1}{2}))$. Τότε υπάρχει $\vec{u}_1 \prec \vec{w}$ τέτοιο ώστε $\widetilde{E}^{<\infty}(\vec{u}_1) \cap \widetilde{L}^{\xi}(\Sigma, \vec{k}) \subseteq x_{(\cdot)}^{-1}(\widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2}))$ για κάποιο $1 \leq i_1 \leq m_1$. Από το σημείο αυτό, η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 3.1.2. Ανάλογα δουλεύουμε και για το $L^{<\infty}(\Sigma, \vec{k})$. □

Σημειώσεις. Έχουμε ήδη δει ότι τα στοιχεία των ημιομάδων $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ αναπαρίστανται ως $\widetilde{L}(\Sigma, \vec{k})$ ή $L(\Sigma, \vec{k})$ λέξεις για κάποιο κατάλληλο αλφάβητο Σ και κάποια κυριαρχούσα ακολουθία $\vec{k}$. Βεβαίως, μπορούμε να έχουμε τα ανάλογα αποτελέσματα του Θεωρήματος 3.3.2 για αυτές τις ημιομάδες.

Κεφάλαιο 4

Ρητά τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε (τοπολογικά δυναμικά) συστήματα με δείκτες στους ρητούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου είναι γενικότερα, με την έννοια ότι δίνουν αποτελέσματα για συστήματα με δείκτες σε ημιομάδες τα στοιχεία των οποίων αναπαρίστανται ως ω-$\mathbb{Z}^*$-located ή ω-located λέξεις, άρα ισχύουν και για συστήματα με δείκτες ρητούς. Στο κεφάλαιο αυτό όμως, δεδομένης της φύσης των ρητών αριθμών θα δούμε ότι μπορούμε να πάρουμε πιο λεπτά αποτελέσματα, γενικεύοντας αρκετά θεμελιακά αποτελέσματα της θεωρίας των συνήθων τοπολογικών δυναμικών συστημάτων.

Το 1927, ο Birkhoff απέδειξε (στην [Bi]) ότι κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X,T), όπου ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση, έχει ένα recurrent στοιχείο, που σημαίνει ότι υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ με $\alpha_n \to \infty$ τέτοια ώστε $T^{\alpha_n}(x) \to x$. Η πολλαπλή έκδοση του θεωρήματος επανεμφάνισης του Birkhoff οφείλεται στους Furstenberg και Weiss και διατυπώνεται παρακάτω:

Θεώρημα 4.0.3. *([FuW], 1978) Αν X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1,\ldots,T_l$ είναι συνεχείς απεικονίσεις από το X στον εαυτό του που μετατίθενται ανά δύο, τότε υπάρχουν $x \in X$ και ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $\alpha_n \to \infty$ τέτοια ώστε $T_i^{\alpha_n}(x) \to x$ ταυτόχρονα για $1 \le i \le l$ (στην περίπτωση αυτή, το x καλείται* **πολλαπλώς recurrent σημείο για τους $T_1,\ldots,T_l$**).

Μια συνέπεια (στην πραγματικότητα μια ισοδύναμη μορφή) του Θεωρήματος 4.0.3 είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 4.0.4. *Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1,\ldots,T_l$ είναι συνεχείς απεικονίσεις που μετατίθενται ανά δύο από* *το X στον εαυτό του, τότε υπάρχουν $x_0 \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $T_i^{n_0}(x_0) \in B(x_0, \varepsilon)$ για κάθε $1 \leq i \leq l$.*

Στην πραγματικότητα, το Θεώρημα 4.0.4 μπορεί να θεωρηθεί ως η τοπολογική έκφραση του διαμεριστικού θεωρήματος του Gallai (δες [GRS]), ότι για $l \in \mathbb{N}$ και κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}^l$, κάποιο από τα σύνολα της διαμέρισης περιέχει αφφινικές εικόνες κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου του $\mathbb{N}^l$ (μια **αφφινική εικόνα** ενός υποσυνόλου F του $\mathbb{N}^l$ είναι κάθε σύνολο της μορφής $\alpha + \beta F$ όπου $\alpha \in \mathbb{N}^l, \beta \in \mathbb{N}$). Σημειώνουμε ότι το θεώρημα του Gallai είναι η πολυδιάστατη επέκταση του θεωρήματος του van der Waerden ([vdW], 1927), σύμφωνα με το οποίο για κάθε πεπερασμένη διαμέριση του συνόλου των φυσικών αριθμών υπάρχει σύνολο της διαμέρισης το οποίο περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους, το οποίο είναι ένα (ίσως το πιο) θεμελιακό αποτέλεσμα της θεωρίας Ramsey.

Το σημείο αφετερίας είναι το ισχυρό διαμεριστικό θεώρημα για το σύνολο των ρητών αριθμών που αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 2 (Θεώρημα 2.5.2), το οποίο χαρακτηρίσαμε ως ένα ισχυρό van der Waerden θεώρημα για το σύνολο των ρητών αριθμών.

Επεκτείνοντας την κλασσική έννοια του τοπολογικού δυναμικού συστήματος, εισάγουμε την έννοια του ρητού δυναμικού συστήματος (Ορισμός 4.2.2). Κατά συνέπεια αναπτύσουμε μια θεωρία επανεμφάνισης για ρητά δυναμικά συστήματα, επεκτείνοντας τα θεμελιώδη αποτελέσματα των Furstenberg και Weiss που αναφέρονται σε δυναμικά συστήματα με δείκτες από φυσικούς αριθμούς ([Fu], [FuW]) που αναφέρθηκαν παραπάνω. Σημειώνουμε ακόμα ότι τα αποτελέσματα επανεμφάνισης του κεφαλαίου αυτού είναι ισχυρότερα από αυτά που έπονται από τα γενικότερα αποτελέσματα επανεμφάνισης που αφορούν τοπολογικά δυναμικά συστήματα με δείκτες από λέξεις του προηγούμενου κεφαλαίου. Συγκεκριμένα:

(1) Αποδεικνύουμε ένα τοπολογικό θεώρημα van der Waerden για το σύνολο των ρητών αριθμών (Θεώρημα 4.1.3) και την πολλαπλή του έκφραση (Θεώρημα 4.3.1) επεκτείνοντας το Θεώρημα 4.0.4 σε ρητά δυναμικά συστήματα.

(2) Ορίζοντας τα ελαχιστικά ρητά συστήματα και χαρακτηρίζοντάς τα ως τα συστήματα που έχουν μόνο ομοιόμορφα ρητά recurrent στοιχεία, αποδεικνύουμε, στο Θεώρημα 4.3.2, μια ισχυρή ιδιότητα επανεμφάνισης των ελαχιστικών ρητών δυναμικών συστημάτων, δίνοντας μια ισοδύναμη έκφραση του Θεωρήματος 4.3.1.

(3) Αποδεικνύουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος 4.0.3 για ρητά δυναμικά συστήματα στο Θεώρημα 4.4.1, το οποίο εν συνεχεία δίχνουμε ότι είναι ισοδύναμο με τα Θεωρήματα 4.3.1 και 4.3.2.

Ακόμα, παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων στην τοπολογία (Θεωρήματα 4.5.1 και 4.5.2), στην απειροσυνδυαστική (Θεώρημα 4.1.4, Θεώρημα 4.3.3, Πόρισμα 4.3.6), στις διοφαντικές προσεγγίσεις και στη θεωρία αριθμών (εφαρμογές των Θεωρημάτων 4.5.1 και 4.5.2).

4.1 Ένα τοπολογικό τύπου van der Waerden θεώρημα στο σύνολο των ρητών αριθμών

Εισάγουμε την έννοια του απλού ρητού δυναμικού συστήματος από ένα συμπαγή μετρικό χώρο X και μια ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ από συνεχείς συναρτήσεις από το X στο X (Ορισμός 4.1.1). Αποδεικνύουμε ένα θεώρημα επανεμφάνισης για τέτοια συστήματα στο Θεώρημα 4.1.3, επεκτείνοντας το ανάλογο αποτέλεσμα των Furstenberg και Weiss (Θεώρημα 4.0.4, περίπτωση $l = 1$). Το Θεώρημα 4.1.3 άπεται από το Θεώρημα 2.5.2. Το αντίστροφο είναι μερικώς σωστό καθώς το Θεώρημα 4.1.3 δίνει μια ασθενέστερη μορφή του Θεωρήματος 2.5.2, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα θεώρημα τύπου van der Waerden για το σύνολο των ρητών αριθμών.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ οικογένεια από συνεχείς απεικονίσεις που ανα δύο μετατίθενται από το X στο X. Για κάθε μη μηδενικό ρητό αριθμό q με $dom(q) = \{t_1 < \ldots < t_l\}$, ορίζουμε*

$$\mathcal{T}^q(x) = T_{t_1}^{q_{t_1}} \ldots T_{t_l}^{q_{t_l}}(x) \text{ και } \mathcal{T}^0(x) = x \text{ για κάθε } x \in X.$$

Λέμε ότι η $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}^q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$ είναι μια **οικογένεια με δείκτες στους ρητούς** *του X που ορίζεται από την οικογένεια $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ και ότι το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ είναι ένα* **απλό ρητό δυναμικό σύστημα**.

Παρατήρηση 4.1.2. *Για μια οικογένεια $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}^q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$, έχουμε εν γένει $\mathcal{T}^{p+q} \neq \mathcal{T}^p\mathcal{T}^q$, ενώ αν $p, q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ με $q \prec p$ έχουμε $\mathcal{T}^{p+q} = \mathcal{T}^p\mathcal{T}^q$.*

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5.2 αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα επανεμφάνισης για απλά ρητά δυναμικά συστήματα επεκτείνοντας το ανάλογο αποτέλεσμα των Furstenberg και Weiss (Θεώρημα 4.0.4, περίπτωση $l = 1$).

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένα απλό ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\beta \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$\mathcal{T}^{p\beta+q\gamma}(x_0) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ για κάθε } 0 \le p, q \le k.$$

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Καθώς X συμπαγής, έχουμε $X = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ για κάποια $x_1, \ldots, x_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$. Έστω $x \in X$. Παίρνουμε μια διαμέριση του συνόλου των ρητών αριθμών $\mathbb{Q} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$, όπου

$$q \in Q_i \;\Leftrightarrow\; \mathcal{T}^q(x) \in B(x_i, \tfrac{\varepsilon}{2}) \text{ και } \mathcal{T}^q(x) \notin B(x_j, \tfrac{\varepsilon}{2}) \text{ για } j < i.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.2, υπάρχει $1 \leq i_0 \leq m$ και C^-, V^-, C^+, V^+ μη-κενά σύνολα με $C^- \cap V^- = \emptyset = C^+ \cap V^+$, τέτοια ώστε

$$q^*_{(p,q)} = \sum_{t \in C^-} q_t \tfrac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + p \sum_{t \in V^-} \tfrac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!} + \sum_{t \in C^+} q_t (-1)^{t+1} t! + q \sum_{t \in V^+} (-1)^{t+1} t! \in Q_{i_0}$$

για κάθε $1 \leq p, q \leq k+1 \leq \min\{|t| : \ t \in V^- \cup V^+\}$, όπου $1 \leq q_t \leq |t|$, $t \in \mathbb{Z}^*$ και $\max dom^-(q^*_{(1,1)}) < k_1 < k_2 < \min dom^+(q^*_{(1,1)})$. Ισοδύναμα, αν $\beta = \sum_{t \in V^-} \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!}$, $\gamma = \sum_{t \in V^+} (-1)^{t+1} t!$, $\delta = \sum_{t \in C^-} q_t \frac{(-1)^{-t}}{(-t+1)!}$ και $\epsilon = \sum_{t \in C^+} q_t (-1)^{t+1} t!$ έχουμε

$$\mathcal{T}^{\delta + p\beta + \epsilon + q\gamma}(x) \in B(x_{i_0}, \tfrac{\varepsilon}{2}) \text{ για κάθε } 1 \leq p, q \leq k+1.$$

Έστω $x_0 = \mathcal{T}^{\delta + \beta + \epsilon + \gamma}(x)$. Τότε $\mathcal{T}^{p\beta + q\gamma}(x_0) \in B(x_0, \varepsilon)$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. □

Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, το Θεώρημα 4.1.3 είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.5.2. Θα δείξουμε ότι το αντίστροφο είναι μερικώς σωστό. Στην πραγματικότητα θα δούμε ότι το Θεώρημα 4.1.3 δίνει μια ασθενή μορφή του Θεωρήματος 2.5.2, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα θεώρημα τύπου van der Waerden για το σύνολο των ρητών αριθμών. Έτσι, το Θεώρημα 4.1.3 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τοπολογικό θεώρημα van der Waerden για το σύνολο των ρητών αριθμών.

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω $k_1 < k_2$ πραγματικοί αριθμοί. Αν $\mathbb{Q} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοιο ώστε το σύνολο Q_{i_0} έχει την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $\alpha + p\beta + q\gamma \subseteq Q_{i_0}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάποιο Q_j ικανοποιεί το συμπέρασμα. Τότε, κάποιο Q_{i_0} θα εμφανιστεί για άπειρα k (αφού τα σύνολα της διαμέρισης είναι πεπερασμένα στον αριθμό). Αυτό το Q_{i_0} είναι το ζητούμενο.

Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Q}}$ και μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$ όπου $q_1 = 0$. το Ω γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος με μετρική

$$d(\omega, \omega') = \inf\{\tfrac{1}{t} : \ \omega(q_i) = \omega'(q_i) \text{ για } 1 \leq i < t\}.$$

Έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια με δείκτες στους ρητούς που ορίζεται από τους $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ με

$$T_n \omega(q) = \omega(q + (-1)^{n+1} n!),\ n \in \mathbb{N} \text{ και } T_n \omega(q) = \omega(q + \tfrac{(-1)^{-n}}{(-n+1)!}),\ -n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε ένα συγκεκριμένο σημείο $\omega \in \Omega$ με κανόνα $\omega(q) = i \Leftrightarrow q \in Q_i$ και έστω $X = \overline{\{\mathcal{T}^{s_1} \dots \mathcal{T}^{s_m}\omega : \; s_i \in \mathbb{Q}, \; m \in \mathbb{N}, \; 1 \leq i \leq m\}}$. Τότε το $(X, \mathcal{T})$ είναι ένα απλό ρητό δυναμικό σύστημα, έτσι, από το Θεώρημα 4.1.3 (για $\varepsilon = 1$) υπάρχουν $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε $d(\mathcal{T}^{p\beta+q\gamma}(x_0), x_0) < 1$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. Έχουμε ότι

$$(*) \qquad x_0(0) = x_0(p\beta + q\gamma) \text{ για κάθε } 0 \leq p, q \leq k.$$

Το x_0 είναι στοιχείο του X, άρα υπάρχουν $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε το x_0 είναι κοντά στο $\mathcal{T}^{s_1} \dots \mathcal{T}^{s_m}\omega$. Έστω $\alpha = s_1 + \ldots + s_m \in \mathbb{Q}$. Από την $(*)$ έχουμε ότι $\omega(\alpha) = \omega(\alpha + p\beta + q\gamma)$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, συνεπώς, έχουμε $\alpha + p\beta + q\gamma \in Q_{\omega(\alpha)}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. □

Παρατήρηση 4.1.5. *Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα 4.1.4 δεν είναι αρκετά ισχυρό για να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.3, κυρίως διότι δεν μπορούμε να ελέγξουμε το πεδίο ορισμού του* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *εν σχέση με τα πεδία ορισμού των* $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ *και επειδή εν γένει* $\mathcal{T}^{p+q} \neq \mathcal{T}^p\mathcal{T}^q$.

4.2 Ομοιόμορφη ρητή επαναφορά και ελαχιστικά ρητά δυναμικά συστήματα

Στην παρούσα παράγραφο εισάγουμε την έννοια του ρητού δυναμικού συστήματος (Ορισμός 4.2.2 παρακάτω) όπως και την έννοια του ομοιομόρφως ρητού recurrent στοιχείου ενός τέτοιου συστήματος (Ορισμός 4.2.9). Ορίζοντας τα ελαχιστικά ρητά δυναμικά συστήματα (Ορισμός 4.2.4) αποδεικνύουμε ότι κάθε ρητό δυναμικό σύστημα έχει ομοιομόρφως ρητά recurrent στοιχεία. Στην πραγματικότητα ένα ρητό δυναμικό σύστημα είναι ελαχιστικό αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του είναι ομοιομόρφως ρητά recurrent (Θεωρήματα 4.2.10 και 4.2.12).

Για να ορίσουμε την έννοια του ρητού δυναμικού συστήματος χρειαζόμαστε τον έννοια της μεταθετικότητας των οικογενειών με δείκτες στους ρητούς που δίνουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω* $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}_1^q)_{q\in\mathbb{Q}}, \dots, \mathcal{T}_l = (\mathcal{T}_l^q)_{q\in\mathbb{Q}}$, l *οικογένειες με δείκτες στους ρητούς του* X *που ορίζονται από τις μεταθετικές οικογένειες απεικονίσεων* $\{T_{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}, \dots, \{T_{l,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ *του* X *αντιστοίχως. Λέμε ότι οι οικογένειες* $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l$ **μετατίθενται** *αν* $T_{i,n_1}T_{j,n_2} = T_{j,n_2}T_{i,n_1}$ *για κάθε* $1 \leq i$, $j \leq l$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του ρητού δυναμικού συστήματος.

Ορισμός 4.2.2. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{T_{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}, \dots, \{T_{l,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, l μεταθετικές οικογένειες ομοιομορφισμών από το X στο X. Αν οι οικογένειες $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}_1^q)_{q\in\mathbb{Q}}, \dots, \mathcal{T}_l = (\mathcal{T}_l^q)_{q\in\mathbb{Q}}$, που ορίζονται από τις οικογένειες $\{T_{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}, \dots, \{T_{l,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ αντιστοίχως, μετατίθενται, τότε λέμε ότι το $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ είναι ένα* **ρητό δυναμικό σύστημα**.

Παρατήρηση 4.2.3. *Για την οικογένεια $\mathcal{T} = (\mathcal{T}^q)_{q\in\mathbb{Q}}$ ενός ρητού δυναμικού συστήματος $(X, \mathcal{T})$ έχουμε εν γένει ότι $\mathcal{T}^{-q} \neq (\mathcal{T}^{-1})^q$, όπου έχουμε θέσει $(\mathcal{T}^{-1})^q = (\mathcal{T}^q)^{-1}$.*

Θα ορίσουμε και θα χαρακτηρίσουμε τα ελαχιστικά ρητά δυναμικά συστήματα.

Ορισμός 4.2.4. *Ένα ρητό δυναμικό σύστημα $(X, T_1, \dots, T_l)$, όπου η $\mathcal{T}_i = (\mathcal{T}_i^q)_{q\in\mathbb{Q}}$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ που μετατίθενται ανά δύο του X για $1 \leq i \leq l$, λέγεται* **ελαχιστικό** *αν για κάθε κλειστό $Y \subseteq X$ με $T_{i,n}(Y) = Y$ για κάθε $1 \leq i \leq l$, $n \in \mathbb{Z}^*$ έχουμε $Y = X$ ή $Y = \emptyset$.*

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ ένα ρητό δυναμικό σύστημα, όπου για $1 \leq i \leq l$, η $\mathcal{T}_i = (\mathcal{T}_i^q)_{q\in\mathbb{Q}}$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ που ανά δύο μετατίθενται. Έστω G η ομάδα των ομοιομορφισμών του X που παράγεται από τις συναρτήσεις $T_{i,n}$, για $n \in \mathbb{Z}^*$ και $1 \leq i \leq l$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ είναι ελαχιστικό.*

(ii) $\overline{\{S(x) : S \in G\}} = X$ *για κάθε* $x \in X$.

(iii) *Για κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $V \subseteq X$ υπάρχει ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο της G, F, τέτοιο ώστε $\bigcup_{S\in F} S^{-1}(V) = X$.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$, $1 \leq i \leq l$, έχουμε ότι $T_{i,n}(\overline{\{S(x) : S \in G\}}) = \overline{\{S(x) : S \in G\}}$. Καθώς $\overline{\{S(x) : S \in G\}} \neq \emptyset$ και το $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ είναι ελαχιστικό δυναμικό σύστημα, έχουμε ότι $\overline{\{S(x) : S \in G\}} = X$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Αν το Y είναι κλειστό μη κενό υποσύνολο του X με $T_{i,n}(Y) = Y$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$, $1 \leq i \leq l$, τότε $X = \overline{\{S(y) : S \in G\}} \subseteq Y$ για κάθε $y \in Y$. Τότε $Y = X$, συνεπώς, $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ είναι ελαχιστικό.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Για κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο V έχουμε $\bigcup_{S\in G} S^{-1}(V) = X$. Από τη συμπάγεια του X έχουμε το συμπέρασμα.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω ότι το $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ δεν είναι ελαχιστικό. Έστω Y ένα μη κενό κλειστό αναλλοίωτο γνήσιο υποσύνολο του X και $V = X \setminus Y$. Τότε $\bigcup_{S\in G} S^{-1}(V) \neq X$, αντίφαση. □

Ορισμός 4.2.6. *Έστω $(X, T_1, \ldots, T_s)$ ρητό δυναμικό σύστημα και $Y \subseteq X$. Λέμε ότι το $(Y, T_1|_Y, \ldots, T_s|_Y)$ είναι ένα* **υποσύστημα** *του $(X, T_1, \ldots, T_s)$ αν*

(i) Το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, και

(ii) $T_{i,n}(Y) = Y$ για κάθε $1 \leq i \leq s$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

Πρόταση 4.2.7. *Κάθε ρήτο δυναμικό σύστημα έχει ελαχιστικό υποσύστημα.*

Απόδειξη. Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ένα ρητό δυναμικό σύστημα, όπου για $1 \leq i \leq l$, η $\mathcal{T}_i = (\mathcal{T}_i^q)_{q \in \mathbb{Q}}$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ που ανά δύο μετατίθενται. Έστω $\mathcal{L} = \{Y \subseteq X : Y \neq \emptyset,\ Y \text{ κλειστό και } T_{i,n}(Y) = Y \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}^*,\ 1 \leq i \leq l\}$. $\mathcal{L} \neq \emptyset$ καθώς $X \in \mathcal{L}$. Έστω $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ ολικά διατεταγμένη οικογένεια με τη σχέση του περιέχεσθαι. Η $\mathcal{D}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και καθώς ο X είναι συμπαγής, έχουμε ότι $A := \bigcap_{Y \in \mathcal{D}} Y \neq \emptyset$, με $A \subseteq Y$ για κάθε $Y \in \mathcal{D}$. Σύμφωνα με το λήμμα του Zorn υπάρχει ένα ελαχιστικό $Y_0 \in \mathcal{L}$. Τότε, το $(Y_0, \mathcal{T}_1|_{Y_0}, \ldots, \mathcal{T}_l|_{Y_0})$ είναι ένα ελαχιστικό υποσύστημα. □

Θα ορίσουμε την έννοια των ομοιόμορφα ρητών recurrent στοιχείων για ένα ρητό δυναμικό σύστημα. Προηγουμένως, θα υπενθυμίσουμε την έννοια του syndetic υποσυνόλου μιας μεταθετικής (ημι-)ομάδας.

Ορισμός 4.2.8. *Ένα υποσύνολο E μιας αβελιανής (ημι-)ομάδας G είναι* **syndetic** *αν υπάρχει $F \in [G]_{>0}^{<\omega}$ τέτοιο ώστε $G = \bigcup_{g \in F} \{s \in G : g + s \in E\}$.*

Ορισμός 4.2.9. *Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ένα ρητό δυναμικό σύστημα, όπου για $1 \leq i \leq l$, η $\mathcal{T}_i$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ που ανά δύο μετατίθενται. Ένα $x \in X$ είναι ένα* **ομοιομόρφως ρητό recurrent** *στοιχείο για το $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ αν για κάθε περιοχή V του x, το σύνολο $\{S \in G : S(x) \in V\}$ είναι syndetic, όπου G είναι η ομάδα ομοιομορφισμών του X που παράγεται από τις συναρτήσεις $T_{i,n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$ και $1 \leq i \leq l$.*

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει τη σύνδεση μεταξύ των ελαχιστικών ρητών δυναμικών συστημάτων και των ομοιομόρφως ρητών recurrent στοιχείων.

Θεώρημα 4.2.10. *Αν $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ είναι ένα ελαχιστικό ρητό δυναμικό σύστημα, τότε κάθε σημείο $x \in X$ είναι ομοιομόρφως ρητά recurrent.*

Απόδειξη. Αν κάθε $\mathcal{T}_i$ για $1 \leq i \leq l$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ που ανά δύο μετατίθενται και G είναι η ομάδα των ομοιομορφισμών που παράγεται από τους $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$, $1 \leq i \leq l$, τότε για κάθε $x \in X$ και κάθε $V \subseteq X$ ανοικτό, το σύνολο $\{S \in G : S(x) \in V\}$ είναι syndetic. Πράγματι, από την Πρόταση 4.2.5 έχουμε ότι $\bigcup_{i=1}^{m} S_i^{-1}(V) = X$ για κάποια $S_1, \ldots, S_m \in G$, $m \in \mathbb{N}$. Έτσι, για κάθε $S \in G$ για κάποιο $1 \leq i \leq m$ έχουμε $S_i(S(x)) \in V$, ισοδύναμα, $S_i S \in \{S \in G : S(x) \in V\}$. □

Θεώρημα 4.2.11. *Για κάθε ρητό δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$, το σύνολο των ομοιομόρφως ρητά recurrent στοιχείων είναι μη-κενό.*

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση 4.2.7 και το Θεώρημα 4.2.10. □

Μπορούμε τώρα να χαρακτηρίσουμε τα ελαχιστικά υποσυστήματα ενός ρητού δυναμικού συστήματος μέσω των ομοιομόρφως ρητά recurrent στοιχείων του συστήματος.

Θεώρημα 4.2.12. *Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ ένα ρητό δυναμικό σύστημα, όπου για $1 \leq i \leq l$, η $\mathcal{T}_i$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ που ανά δύο μετατίθενται και G είναι η ομάδα των ομοιομορφισμών του X που παράγεται από τις συναρτήσεις $T_{i,n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$ και $1 \leq i \leq l$. Τότε το $(Y, \mathcal{T}_1|_Y, \dots, \mathcal{T}_l|_Y)$ είναι ελαχιστικό υποσύστημα του $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$ αν και μόνο αν $Y = \overline{\{S(x) :\ S \in G\}}$ για x ομοιομόρφως ρητό recurrent στοιχείο του συστήματος $(X, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $y \in \overline{\{S(x) :\ S \in G\}}$ τότε $x \in \overline{\{S(y) :\ S \in G\}}$. Έστω ότι δεν ισχύει και έστω V μια αμοικτή περιοχή του x με $\overline{V} \cap \overline{\{S(y) :\ S \in G\}} = \emptyset$. Το x είναι ομοιομόρφος ρητό recurrent άρα υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{S_1, \dots, S_m\}$, $m \in \mathbb{N}$ από στοιχεία της G ώστε για κάθε $S \in G$ να έχουμε $S_i(S(x)) \in V$ για κάποιο $1 \leq i \leq m$. Άρα, $\{S(x) :\ S \in G\} \subseteq \bigcup_{i=1}^m S_i^{-1}(V)$ και άρα $y \in \overline{\{S(x) :\ S \in G\}} \subseteq \bigcup_{i=1}^m S_i^{-1}(\overline{V})$. Τότε έχουμε $\overline{V} \cap \overline{\{S(y) :\ S \in G\}} \neq \emptyset$, άτοπο. □

4.3 Οι ιδιότητες επαναφοράς των ρητών δυναμικών συστημάτων

Στα Θεωρήματα 4.3.1 και 4.3.2 παρακάτω, αποδεικνύουμε ότι τα ρητά δυναμικά συστήματα έχουν σημαντικές ιδιότητες επανεμφάνισης, ανάλογες με αυτές των κλασσικών δυναμικών συστημάτων. Έτσι, το Θεώρημα 4.3.1 είναι μια επέκταση του Θεωρήματος 4.0.4 των Furstenberg-Weiss στα ρητά δυναμικά συστήματα και το Θεώρημα 4.3.2 είναι μια ισοδύναμη έκφραση του Θεωρήματος 4.3.1 (για τα ανάλογα αποτελέσματα με δείκτες στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{Z}$ δες [Fu], [FuW] και [M]).

Ως συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.1, το οποίο είναι η πολλαπλή έκφραση του Θεωρήματος 4.1.3 στην περίπτωση που οι μετασχηματισμοί T_i είναι αντιστρέψιμοι, παίρνουμε ένα συνδυαστικό αποτέλεσμα τύπου Gallai για τους ρητούς αριθμούς (Θεώρημα 4.3.3), αποδεικνύοντας ότι για $l \in \mathbb{N}$ και κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{Q}^l$, ένα από τα σύνολα της διαμέρισης περιέχει (γενικευμένες) αφφινικές εικόνες κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου του $\mathbb{Q}^l$. Παρατηρούμε ακόμα ότι τα syndetic υποσύνολα του $\mathbb{Q}^l$ έχουν την ίδια ιδιότητα και ότι το Θεώρημα 4.3.3 έχει εφαρμογές για συναρτήσεις σε μεγάλα κομμάτια του $\mathbb{Q}^l$.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(x_0) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ για κάθε } 0 \leq p, q \leq k,\ 1 \leq i \leq l.$$

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l, R)$ ελαχιστικό ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε, για κάθε μη-κενό ανοικτό σύνολο U υπάρχουν $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε*

$$\bigcap_{0 \leq p,q \leq k} (U \cap (\mathcal{T}_1^{p\beta+q\gamma})^{-1} U \cap \ldots \cap (\mathcal{T}_l^{p\beta+q\gamma})^{-1} U) \neq \emptyset.$$

Απόδειξη των Θεωρημάτων 4.3.1 και 4.3.2. Η μέθοδος απόδειξης είναι επαγωγή στο l, και αποτελείται από τρία βήματα:

(1) Θα δείξουμε ότι το Θεώρημα 4.3.1 αληθεύει για $l = 1$,

(2) αν το Θεώρημα 4.3.1 αληθεύει για κάποιο $l \in \mathbb{N}$ τότε το Θεώρημα 4.3.2 αληθεύει επίσης για l, και

(3) αν το Θεώρημα 4.3.2 αληθεύει για κάποιο $l \in \mathbb{N}$ τότε το Θεώρημα 4.3.1 αληθεύει για $l + 1$.

Για $l = 1$ έχουμε το συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.3.1 από το Θεώρημα 4.1.3.

Έστω $l \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε το Θεώρημα 4.3.1 ισχύει. Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l, R)$ ελαχιστικό ρητό δυναμικό σύστημα, όπου η $\mathcal{T}_i$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς που μετατίθενται ανά δύο $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ του X για $1 \leq i \leq l$, R ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς που μετατίθενται ανά δύο $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ του $X, k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Έστω $U \subseteq X$ μη-κενό ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχουν $u \in U$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $B(u, \varepsilon) \subseteq U$. Θεωρούμε $V = B(u, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U$. Τότε, για κάθε $x \in X$ με $d(x, V) := \inf\{d(x, y) : y \in V\} < \frac{\varepsilon}{2}$ έχουμε ότι $x \in U$. Έστω G η ομάδα των ομοιομορφισμών που παράγεται από τους $\{T_{i,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$, $1 \leq i \leq l$ και $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$.

Καθώς το σύστημα $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l, R)$ είναι ελαχιστικό, υπάρχουν $S_1, \ldots, S_m \in G$, $m \in \mathbb{N}$ με $X = \bigcup_{i=1}^m S_i^{-1} V$ $(*)$. Επειδή X συμπαγής, κάθε S_i, $1 \leq i \leq m$ είναι ομοιομόρφος συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $y, z \in X$ με $d(y, z) < \delta$ τότε $d(S_i(y), S_i(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$ για $1 \leq i \leq m$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.3.1 υπάρχουν $y \in X$, $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $d(y, \mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(y)) < \delta$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, $1 \leq i \leq l$. Από τη σχέση $(*)$ έχουμε ότι υπάρχει $1 \leq$

$i \leq m$ τέτοιο ώστε $y \in S_i^{-1}V$. Θέτουμε $x = S_i(y) \in V$. Καθώς το S_j μετατίθενται με τους $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, για $1 \leq i \leq l$, έχουμε ότι $d(x, T_i^{p\beta+q\gamma}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, $1 \leq i \leq l$. Τότε έχουμε ότι $\{x, \mathcal{T}_1^{p\beta+q\gamma}(x), \ldots, \mathcal{T}_l^{p\beta+q\gamma}(x)\} \subseteq U$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, έτσι, $x \in \bigcap_{0\leq p,q\leq k}(U \cap (\mathcal{T}_1^{p\beta+q\gamma})^{-1}U \cap \ldots \cap (\mathcal{T}_l^{p\beta+q\gamma})^{-1}U) \neq \emptyset$, δηλαδή το συμπέρασμα.

Έστω ότι το Θεώρημα 4.3.2 αληθεύει για κάποιο $l \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι το Θεώρημα 4.3.1 αληθεύει για $l+1$. Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{l+1})$ ρητό δυναμικό σύστημα, όπου η $\mathcal{T}_i$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς που μετατίθενται ανά δύο $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ του X για $1 \leq i \leq l+1, k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{l+1})$ είναι ελαχιστικό (αλλιώς, περιοριζόμαστε σε ένα ελαχιστικό υποσύστημα του $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{l+1})$). Έστω U_0 ένα μη-κενό ανοικτό σύνολο με $diam(U_0) := \sup\{d(x,y) : x, y \in U_0\} < \frac{\varepsilon}{2}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.2 (για το ελαχιστικό σύστημα $(X, \mathcal{T}_1\mathcal{T}_{l+1}^{-1}, \ldots, \mathcal{T}_l\mathcal{T}_{l+1}^{-1}, \mathcal{T}_{l+1})$) υπάρχουν $\beta_1 \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\gamma_1 \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta_1) = \emptyset = dom^-(\gamma_1)$, $\max dom^-(\beta_1) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma_1)$ τέτοια ώστε

$$B_0 := \bigcap_{0\leq p,q\leq k} (U_0 \cap \bigcap_{s=1}^{l} [\mathcal{T}_s^{p\beta_1+q\gamma_1}(\mathcal{T}_{l+1}^{p\beta_1+q\gamma_1})^{-1}]^{-1}U_0) \neq \emptyset.$$

Έστω U_1 μη-κενό ανοικτό συνολο με $diam(U_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ τέτοιο ώστε

$$U_1 \subseteq (\mathcal{T}_{l+1}^{p\beta_1+q\gamma_1})^{-1}(B_0) = \bigcap_{0\leq p,q\leq k} \bigcap_{s=1}^{l+1} (\mathcal{T}_s^{p\beta_1+q\gamma_1})^{-1}U_0.$$

Υποθέτουμε ότι για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει $U_1, \ldots, U_m$ μη-κενά, ανοικτά σύνολα με $diam(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$, τέτοια ώστε

$$(**)\ \ U_j \subseteq \bigcap_{0\leq p,q\leq k} \bigcap_{s=1}^{l+1} (\mathcal{T}_s^{p(\beta_j+\ldots+\beta_{i+1})+q(\gamma_j+\ldots+\gamma_{i+1})})^{-1}U_i$$

για κάθε $0 \leq i < j \leq m$, με $\beta_{j-1} + \gamma_{j-1} \prec \beta_j + \gamma_j$ για $2 \leq j \leq m$. Από το Θεώρημα 4.3.2 υπάρχουν $\beta_{m+1} \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ και $\gamma_{m+1} \in \mathbb{Z}^*$ με $\beta_m + \gamma_m \prec \beta_{m+1} + \gamma_{m+1}$, $dom^+(\beta_{m+1}) = \emptyset = dom^-(\gamma_{m+1})$ τέτοια ώστε το

$$B_m := \bigcap_{0\leq p,q\leq k} (U_m \cap \bigcap_{s=1}^{l} [\mathcal{T}_s^{p\beta_{m+1}+q\gamma_{m+1}}(\mathcal{T}_{l+1}^{p\beta_{m+1}+q\gamma_{m+1}})^{-1}]^{-1}U_m)$$

είναι μη-κενό σύνολο. Έστω U_{m+1} ένα μη-κενό ανοικτό σύνολο με $diam(U_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ και

$$U_{m+1} \subseteq (\mathcal{T}_{l+1}^{p\beta_{m+1}+q\gamma_{m+1}})^{-1}(B_m) = \bigcap_{0\leq p,q\leq k} \bigcap_{s=1}^{l+1} (\mathcal{T}_s^{p\beta_{m+1}+q\gamma_{m+1}})^{-1}U_m.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό και τη σχέση $(**)$ για $j = m$ έχουμε ότι για κάθε $0 \leq i \leq m$,

$$U_{m+1} \subseteq \bigcap_{0\leq p,q\leq k} \bigcap_{s=1}^{l+1} (\mathcal{T}_s^{p(\beta_{m+1}+\ldots+\beta_{i+1})+q(\gamma_{m+1}+\ldots+\gamma_{i+1})})^{-1} U_i.$$

Επαγωγικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε βρει ακολουθίες $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\beta_n + \gamma_n \prec \beta_{n+1} + \gamma_{n+1}$, $dom^+(\beta_n) = \emptyset = dom^-(\gamma_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε η συνθήκη $(**)$ αληθεύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$, με $\beta_j + \ldots + \beta_{i+1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma_j + \ldots + \gamma_{i+1} \in \mathbb{Z}^*$, για κάθε $0 \leq i < j \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ θεωρούμε $x_n \in U_n$. Καθώς ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής, υπάρχουν $i_0 < j_0$ τέτοια ώστε $d(x_{i_0}, x_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Σύμφωνα με τη συνθήκη $(**)$, αν θέσουμε $\beta = \beta_{j_0} + \ldots + \beta_{i_0+1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma = \gamma_{j_0} + \ldots + \gamma_{i_0+1} \in \mathbb{Z}^*$, έχουμε ότι $\{\mathcal{T}_1^{p\beta+q\gamma}(x_{j_0}), \ldots, \mathcal{T}_{l+1}^{p\beta+q\gamma}(x_{j_0})\} \subseteq U_{i_0}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. Ακόμα, $x_{i_0} \in U_{i_0}$, $d(x_{i_0}, x_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $diam(U_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$, συνεπώς για $x = x_{j_0}$, έχουμε ότι

$$\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(x) \in B(x, \varepsilon) \text{ για κάθε } 0 \leq p, q \leq k,\ 1 \leq i \leq l+1.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Έχουμε δει ότι το Θεώρημα 4.1.3 συνεπάγεται ένα θεώρημα τύπου van der Waerden στους ρητούς αριθμούς, το Θεώρημα 4.1.4. Ο Gallai (ο οποίος αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως Grünwald) επεξέτεινε το κλασσικό θεώρημα του van der Waerden (που αναφέρεται στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{Z}$) σε μεγαλύτερες διαστάσεις (αποτέλεσμα που αναφέρεται στο $\mathbb{N}^l$ ή στο $\mathbb{Z}^l$, $l \in \mathbb{N}$) και αργότερα οι Furstenberg και Weiss ([FuW]) έδωσαν μια απόδειξη του προηγούμενου, χρησιμοποιώντας την θεωρία των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων. Εμείς θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε, στο Θεώρημα 4.3.3, ένα διαμεριστικό θεώρημα τύπου Gallai για το σύνολο $\mathbb{Q}^l$, $l \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας και γενικεύοντας μεθόδους από το [Fu].

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι αν $B \subseteq \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $B \subseteq \mathbb{Z}$) είναι σύνολο που περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους, τότε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{N}$ με $F \subseteq \{1, \ldots, N\}$ θα έχουμε $\alpha + \beta F \subseteq B$ για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ καθώς το B περιέχει κάποια αριθμητική πρόοδο μήκους N. Αντίστοιχα, αν $B \subseteq \mathbb{Q}$ είναι σύνολο το οποίο περιέχει αυθαίρετα μεγάλες εκφράσεις όπως αυτές στο συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.1.4, τότε για G πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $G \subseteq \{1, \ldots, k\}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.4, βρίσκουμε $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ ώστε $\alpha + p\beta + q\gamma \in B$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, άρα $\alpha + \beta G + \gamma G \subseteq B$.

Στην πολυδιάστατη περίπτωση αποδεικνύουμε κάτι πολύ ισχυρότερο. Θα αποδείξουμε τώρα τη γεωμετρική έκφραση του Θεωρήματος 4.3.1.

Θεώρημα 4.3.3. *Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Αν $\mathbb{Q}^l = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοιο ώστε το σύνολο Q_{i_0} έχει την ιδιότητα αν $k \in \mathbb{N}$ και $F \in [\mathbb{Q}^l]^{<\omega}_{>0}$, τότε υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Q}^l, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $\alpha + (p\beta + q\gamma)F \subseteq Q_{i_0}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$ αρίθμηση του $\mathbb{Q}$, όπου $q_1 = 0$ και $\mathbb{Q}^l = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r, r \in \mathbb{N}$. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί για δοσμένα $k \in \mathbb{N}$ και κάποιο πεπερασμένο σύνολο F να βρούμε ένα σύνολο Q_j που ικανοποιεί το συμπέρασμα. Πράγματι, υπάρχουν μόνο πεπερασμένες επιλογές για το Q_j και επειδή μια ακολουθία F_n μπορεί να επιλεγεί όπου όλα τα στοιχεία της περιέχουν όλα τα προηγούμενα (για παράδειγμα $F_n = \{q_1, \ldots, q_n\}^l$, $n \in \mathbb{N}$) και κάθε πεπερασμένο F περιέχεται σε κάποιο από αυτά, ένα σύνολο Q_j που ικανοποιεί το συμπέρασμα για άπειρα F_n και $k \in \mathbb{N}$ θα κάνει για όλα τα F και όλα τα k. Αυτό θα είναι το ζητούμενο Q_{i_0}. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}^l$, $F = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_m\}$ και κάποιο $k \in \mathbb{N}$ δίνονται. Έστω $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Q}^l}$. Τότε, το Ω γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος αν τον εφοδιάσουμε με τη μετρική:

$$d(\omega, \omega') = \inf\{\tfrac{1}{t} : \omega(q_{i_1}, \ldots, q_{i_l}) = \omega'(q_{i_1}, \ldots, q_{i_l}) \text{ για } 1 \leq i_1, \ldots, i_l < t\}.$$

Για $1 \leq i \leq m$ και $\widetilde{q} \in \mathbb{Q}^l$, έστω

$$T_{i,n}\omega(\widetilde{q}) = \omega(\widetilde{q} + (-1)^{n+1}n!\widetilde{e}_i),\ n \in \mathbb{N} \text{ και}$$
$$T_{i,n}\omega(\widetilde{q}) = \omega(\widetilde{q} + \tfrac{(-1)^{-n}}{(-n+1)!}\widetilde{e}_i),\ -n \in \mathbb{N}.$$

Για $1 \leq i \leq m$ θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_i$ με δείκτες στους ρητούς που ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς που μετατίθενται ανά δύο $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$. Ορίζουμε ένα συγκεκριμένο σημείο $\omega \in \Omega$ με κανόνα $\omega(\widetilde{q}) = i \Leftrightarrow \widetilde{q} \in Q_i$, και έστω

$$X = \overline{\{\mathcal{T}_1^{s_{1,1}} \ldots \mathcal{T}_1^{s_{1,l_1}} \ldots \mathcal{T}_m^{s_{m,1}} \ldots \mathcal{T}_m^{s_{m,l_m}}\omega, s_{i,j} \in \mathbb{Q}, l_i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq l_i, 1 \leq i \leq m\}}.$$

Τότε, το $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m)$ είναι ένα ρητό δυναμικό σύστημα, έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.1 (για $\varepsilon = 1$) υπάρχουν $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε $d(\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(x_0), x_0) < 1$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, $1 \leq i \leq m$. Συνεπώς, αν $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$, έχουμε

$$(*) \quad x_0(\widetilde{0}) = x_0((p\beta + q\gamma)\widetilde{e}_1) = \ldots = x_0((p\beta + q\gamma)\widetilde{e}_m) \text{ για κάθε } 0 \leq p, q \leq k.$$

Το x_0 ως στοιχείο του X, είναι οσοδήποτε κοντά σε κάποια μεταφορά του ω, $\mathcal{T}_1^{s_{1,1}} \ldots \mathcal{T}_1^{s_{1,l_1}} \ldots \mathcal{T}_m^{s_{m,1}} \ldots \mathcal{T}_m^{s_{m,l_m}}\omega$, για κάποια $s_{i,j} \in \mathbb{Q}, l_i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq l_i$, $1 \leq i \leq m$. Έστω $\widetilde{\alpha} = (s_{1,1} + \ldots + s_{1,l_1})\widetilde{e}_1 + \ldots + (s_{m,1} + \ldots + s_{m,l_m})\widetilde{e}_m$. Έπεται από τη σχέση $(*)$ ότι

$$\omega(\widetilde{\alpha}) = \omega(\widetilde{\alpha} + (p\beta + q\gamma)\widetilde{e}_1) = \ldots = \omega(\widetilde{\alpha} + (p\beta + q\gamma)\widetilde{e}_m)$$

για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, έτσι, έχουμε $\widetilde{\alpha} + (p\beta + q\gamma)F \subseteq Q_{\omega(\widetilde{\alpha})}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. □

Παρατήρηση 4.3.4. *Σύμφωνα με την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, έχουμε ότι δεν μπορούμε να ελέγξουμε το πεδίο ορισμού των συντεταγμένων του $\alpha \in \mathbb{Q}^l$. Για τον λόγο αυτό, καθώς και επειδή για μια οικογένεια με δείκτες στους ρητούς $\mathcal{T}$, έχουμε εν γένει ότι $\mathcal{T}^{p+q} \neq \mathcal{T}^p\mathcal{T}^q$ $(p, q \in \mathbb{Q})$ προσπάθειες να αποδειχθούν τα Θεωρήματα 4.3.1 ή 4.3.2 από το Θεώρημα 4.3.3 (αποδεικνύοντας ταυτόχρονα την ισοδυναμία αυτών των αποτελεσμάτων) ήταν άκαρπες.*

Στη συνέχεια δίνουμε κάποια πορίσματα του Θεωρήματος 4.3.3.

Ορισμός 4.3.5. *Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Λέμε ότι ένα υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{Q}^l$ είναι* **RVDW(l,k$_1$,k$_2$)-σύνολο** *αν για κάθε $F \in [\mathbb{Q}^l]^{<\omega}_{>0}$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Q}^l, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $\alpha + (p\beta + q\gamma)F \subseteq B$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$.*

Στην ακόλουθη πρόταση αποδεικνύουμε ότι τα syndetic σύνολα ανήκουν στην προηγούμενη κατηγορία συνόλων, άρα από συνδιαστική άποψη είναι πλούσια.

Πρόταση 4.3.6. *Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Αν E είναι syndetic υποσύνολο του $\mathbb{Q}^l$, τότε το E είναι RVDW(l,k_1,k_2)-σύνολο.*

Απόδειξη της Πρότασης 4.3.6. Έστω E syndetic υποσύνολο του $\mathbb{Q}^l$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε $\mathbb{Q}^l = \bigcup_{x \in F}(E + x)$ για κάποιο $F \in [\mathbb{Q}^l]^{<\omega}_{>0}$. Από το Θεώρημα 4.3.3 έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in F$ τέτοιο ώστε $E + x_0$ είναι RVDW(l, k_1, k_2)-σύνολο. Έτσι, το E είναι RVDW(l, k_1, k_2)-σύνολο καθώς αυτή η ιδιότητα εύκολα βλέπουμε ότι είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές. □

Το Θεώρημα 4.3.3 έχει εφαρμογές σε συναρτήσεις που ορίζονται σε μεγάλα κομμάτια του $\mathbb{Q}^l$.

Θεώρημα 4.3.7. *Έστω $F \in [\mathbb{Q}^l]^{<\omega}_{>0}$, $l \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, $k \in \mathbb{N}$ και $r \in \mathbb{N}$. Υπάρχει ένας αριθμός $n_0 \equiv n_0(l, k, k_1, k_2, r, F) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ωστε, αν $\mathbb{Q}^l_n$, $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζει το σύνολο των διανυσμάτων στο $\mathbb{Q}^l$ με στοιχεία ανάμεσα στους αριθμούς $-n$ και n, τότε οποτεδήποτε $n \geq n_0$ και $\mathbb{Q}^l_n = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, $\alpha \in \mathbb{Q}^l$, $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε*

$$\alpha + (p\beta + q\gamma)F \subseteq Q_{i_0} \text{ για κάθε } 0 \leq p, q \leq k.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι μπορούμε για $n \to \infty$ να βρούμε διαμερίσεις για τις οποίες δεν ισχύει το συμπέρασμα.

Θεωρούμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις από το $\mathbb{Q}_n^l$ στο $\Lambda = \{1, \ldots, r\}$ που ορίζουν οι προηγούμενες διαμερίσεις και τις επεκτείνουμε τυχαία στο $\mathbb{Q}^l$ λαμβάνοντας κάθε φορά ένα $\omega_n \in \Lambda^{\mathbb{Q}^l}$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3.3 στην αντίστοιχη διαμέριση ενός οριακού σημείου της $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έστω ω, από το οποίο έχουμε ότι υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Q}^l$, $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε η ω να είναι σταθερή στο $\alpha + (p\beta + q\gamma)F$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. Για n αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι $\alpha + (p\beta + q\gamma)F \subseteq Q_n^l$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$ και ότι για n' μεγάλο ισχύει $\omega_{n'}|_{Q_n^l} = \omega|_{Q_n^l}$, άτοπο. □

Σημειώσεις 4.3.8. *Καθώς (όπως έχουμε ήδη δει) για μια οικογένεια με δείκτες στους ρητούς $\mathcal{T}$, έχουμε εν γένει ότι $\mathcal{T}^{p+q} \neq \mathcal{T}^p\mathcal{T}^q$ ($p, q \in \mathbb{Q}$), δεν μπορούμε να έχουμε (με αυτές τις μεθόδους) πολυωνυμικές επεκτάσεις των προηγούμενων αποτελεσμάτων αυτής της παραγράφου.*

4.4 Ένα θεώρημα τύπου Furstenberg-Weiss για ρητά δυναμικά συστήματα

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε (στο Θεώρημα 4.4.1) μια ισχυροποίηση του Θεωρήματος 4.0.3 για ρητά δυναμκά συστήματα, συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι αν το $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ είναι ένα ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί ότι υπάρχουν $x \in X$ και ακολουθίες $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta_1) = \emptyset = dom^-(\gamma_1)$, $\max dom^-(\beta_1) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma_1)$, $\beta_n + \gamma_n \prec \beta_{n+1} + \gamma_{n+1}$, $dom^+(\beta_n) = \emptyset = dom^-(\gamma_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\mathcal{T}_i^{p\beta_n + q\gamma_n}(x) \to x$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$ ταυτοχρόνως για $1 \leq i \leq l$ (καλούμε αυτά τα στοιχεία **πολλαπλώς ρητά recurrent στοιχεία**). Επιπλέον αποδεικνύουμε ότι το Θεώρημα 4.4.1 είναι ισοδύναμο με τα Θεωρήματα 4.3.1 και 4.3.2 και ότι τα πολλαπλώς ρητά recurrent στοιχεία αποτελούν ένα residual υποσύνολο του X (Ορισμός 4.4.2).

Στο σημείο αυτό (όπως στο [Fu] για τα αντίστοιχα δυναμικά συστήματα που σχετίζονται με το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{Z}$) παρατηρούμε ότι αν η υπόθεση της μεταθετικότητας παραλειφθεί, το προηγούμενο συμπέρασμα δεν ισχύει κατ' ανάγκην. Για παράδειγμα, έστω $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $T_n(x) = \frac{x}{2}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ και $S_n(x) = x + 1$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Αν $\mathcal{T}$ και $\mathcal{S}$ ορίζονται αντίστοιχα από τα $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ και $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, τότε, το μόνο recurrent σημείο της $\mathcal{T}$ είναι το 0 και της $\mathcal{S}$ το ∞. Ακόμα, χωρίς μεταθετικότητα μπορεί οι επαναφορές κάθε σημείου σε μια περιοχή του σημείου να είναι ξένες για τους διάφορους μετασχηματισμούς.

Αυτό φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω $X = \{-1,1\}^{\mathbb{Q}}$ και $\mathcal{T}$ η οικογένεια που ορίζεται από τους $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ με

$$T_n\omega(q) = \omega(q + (-1)^{n+1}n!),\ n \in \mathbb{N} \text{ και } T_n\omega(q) = \omega(q + \tfrac{(-1)^{-n}}{(-n+1)!}),\ -n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε $R : X \to X$ με $R(\omega(q)) = \omega(q)$ αν $q = 0$ και $R(\omega(q)) = -\omega(q)$ αν $q \neq 0$ και $S_n = RT_nR$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Τότε αν $\mathcal{S}$ είναι η οικογένεια που ορίζεται από τους $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, έχουμε ότι $\mathcal{S}^q = R\mathcal{T}^qR$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. $\mathcal{T}^q\omega$ κοντά στο ω σημαίνει ότι $\omega(q) = \omega(0)$. Από την άλλη, $\mathcal{S}^q\omega$ κοντά στο ω σημαίνει ότι $\mathcal{T}^qR\omega$ κοντά στο $R\omega$, δηλαδή $R\omega(q) = R\omega(0)$, άρα $-\omega(q) = \omega(0)$ αν $q \neq 0$. Συνεπώς, τα $\mathcal{T}^q\omega$ και $\mathcal{S}^q\omega$ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα κοντά στο ω.

Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ένα ρητό δυναμικό σύστημα. Θέλουμε να βρούμε ένα σημείο στο χώρο το οποίο επιστρέφει κοντά στον εαυτό του μέσω της δράσης της ίδιας δύναμης των $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l$.

Μια ισχυροποιημένη μορφή του Θεωρήματος 4.0.3 που σχετίζεται με τους ρητούς αριθμούς είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ένα ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχουν $x \in X$ και ακολουθίες $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta_1) = \emptyset = dom^-(\gamma_1)$, $\max dom^-(\beta_1) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma_1)$, $\beta_n + \gamma_n \prec \beta_{n+1} + \gamma_{n+1}$, $dom^+(\beta_n) = \emptyset = dom^-(\gamma_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε*

$$\mathcal{T}_i^{p\beta_n + q\gamma_n}(x) \to x \text{ για κάθε } 0 \leq p, q \leq k \text{ ταυτόχρονα για } 1 \leq i \leq l.$$

Απόδειξη. Για κάθε $s > 0$ έστω

$$F_s = \{x \in X : \text{υπάρχουν } \beta \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \gamma \in \mathbb{Z}^* \text{ με } dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma),$$
$$\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma) \text{ τέτοια ώστε } d(\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(x), x) < \tfrac{1}{s}$$
$$\text{για κάθε } 0 \leq p, q \leq k,\ 1 \leq i \leq l\}.$$

Αν το συμπέρασμα δεν αληθεύει, τότε έχουμε ότι $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus F_n)$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $(X \setminus F_n)^\circ = \emptyset$, το οποιό αντιφάσκει στο Θεώρημα Κατηγορίας του Baire καθώς κάθε $X \setminus F_n$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε ότι $(X \setminus F_{n_0})^\circ \neq \emptyset$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ είναι ελαχιστικό. Για $1 \leq i \leq l$, έστω ότι η $\mathcal{T}_i$ ορίζεται από τους ομοιομορφισμούς που ανά δύο μετατίθενται $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ του X. Αν G είναι η ομάδα ομοιομορφισμών που παράγεται από τους $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, $1 \leq i \leq l$, τότε $X = S_1^{-1}(X \setminus F_{n_0})^\circ \cup \ldots \cup S_m^{-1}(X \setminus F_{n_0})^\circ$ για κάποια $S_1, \ldots, S_m \in G, m \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $y, z \in X$ με $d(y,z) < \delta$ τότε $d(S_i(y), S_i(z)) < \frac{1}{n_0}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$.

Ισχυριζόμαστε ότι αν $x \in S_j^{-1}(X \setminus F_{n_0})^\circ$ για κάποιο $1 \leq j \leq m$, τότε $x \in X \setminus F_{\frac{1}{\delta}}$. Πράγματι, αν έχουμε $\beta \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$,

$\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $d(\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(x), x) < \delta$ για κάθε $0 \le p, q \le k$, $1 \le i \le l$, τότε $d(S_j(\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(x)), S_j(x)) = d(\mathcal{T}_i^{p\beta+q\gamma}(S_j(x)), S_j(x)) < \frac{1}{n_0}$ για κάθε $0 \le p, q \le k$, $1 \le i \le l$, καθώς ο S_j μετατίθεται με τους $\{T_{i,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^*}, 1 \le i \le l$, με $S_j(x) \in (X \setminus F_{n_0})^\circ$, αντίφαση.

Καθώς κάθε $x \in X$ ανήκει στο $S_j^{-1}(X \setminus F_{n_0})^\circ$ για κάποιο $1 \le j \le m$, έχουμε δείξει ότι $x \in X \setminus F_{\frac{1}{\delta}}$ για κάθε $x \in X$, έστι, $X \setminus F_{\frac{1}{\delta}} = X$ που αντιφάσκει στο συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.3.1. □

Ορισμός 4.4.2. *Ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ καλείτε* **residual** *αν περιέχει μια αριθμήσιμη τομή από πυκνά ανοικτά σύνολα.*

Το Θεώρημα 4.4.1 μας δίνει το ακόλουθο.

Πρόταση 4.4.3. *Αν $(X, T_1, \ldots, T_l)$ είναι ελαχιστικό ρητό δυναμικό σύστημα, τότε το σύνολο των πολλαπλώς ρητά recurrent στοιχείων του X είναι residual.*

Απόδειξη. Έπεται από το Θεώρημα 4.4.1, καθώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο F_n είναι πυκνό, ανοικτό και $\emptyset \neq F_n \subseteq \{$πολλαπλώς ρητά recurrent σημεία$\}$. □

Πρόταση 4.4.4. *Τα Θεωρήματα 4.3.1, 4.3.2 και 4.4.1 είναι ισοδύναμα.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δει ότι τα Θεωρήματα 4.3.1 και 4.3.2 είναι ισοδύναμα και ότι το Θεώρημα 4.4.1 έπεται από το Θεώρημα 4.3.1. Έστω $l \in \mathbb{N}$, $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ένα ελαχιστικό ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1, αν U είναι μη-κενό υποσύνολο του X τότε υπάρχει $x \in U$ και ακολουθίες $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta_1) = \emptyset = dom^-(\gamma_1)$, $\max dom^-(\beta_1) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma_1)$, $\beta_n + \gamma_n \prec \beta_{n+1} + \gamma_{n+1}$, $dom^+(\beta_n) = \emptyset = dom^-(\gamma_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\mathcal{T}_i^{p\beta_n+q\gamma_n}(x) \to x$ για κάθε $0 \le p, q \le k$, $1 \le i \le l$. Έτσι, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{T}_i^{p\beta_{n_0}+q\gamma_{n_0}}(x) \in U$ για κάθε $0 \le p, q \le k$, $1 \le i \le l$.

Συνεπώς $\bigcap_{0\le p,q\le k}(U \cap (\mathcal{T}_1^{p\beta_{n_0}+q\gamma_{n_0}})^{-1}U \cap \ldots \cap (\mathcal{T}_l^{p\beta_{n_0}+q\gamma_{n_0}})^{-1}U) \neq \emptyset$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Ορισμός 4.4.5. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{Q}$ καλείται* **RIP(k,k$_1$,k$_2$)-σύνολο** *εάν υπάρχουν ακολουθίες $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta_1) = \emptyset = dom^-(\gamma_1)$, $\max dom^-(\beta_1) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma_1)$, $\beta_n+\gamma_n \prec \beta_{n+1}+\gamma_{n+1}$, $dom^+(\beta_n) = \emptyset = dom^-(\gamma_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε το A να αποτελείται από τους αριθμούς $p\beta_i + q\gamma_i$, $0 \le p, q \le k$ καθώς και από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα της μορφής*

$$p(\beta_{i_1} + \ldots + \beta_{i_s}) + q(\gamma_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_s}),\ 0 \le p, q \le k \text{ με } i_1 < \ldots < i_s.$$

Πρόταση 4.4.6. *Έστω $(X, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l)$ ρητό δυναμικό σύστημα, $k \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί και x_0 πολλαπλώς ρητά recurrent στοιχείο του X. Τότε, για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $R_\delta = \{q \in \mathbb{Q} : \ d(\mathcal{T}_i^q(x_0), x_0) < \delta$ για κάθε $1 \leq i \leq l\}$ περιέχει ένα RIP(k,k_1, k_2)-σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και x_0 ένα σημείο του χώρου που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.4.1. Από το Θεώρημα 4.4.1 υπάρχουν $\beta_1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma_1 \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta_1) = \emptyset = dom^-(\gamma_1)$, $\max dom^-(\beta_1) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma_1)$ ώστε

(1) $\quad d(\mathcal{T}_i^{p\beta_1+q\gamma_1}(x_0), x_0) < \delta$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k, \ 1 \leq i \leq l$.

Έστω $0 < \delta_2 \leq \delta$ τέτοιο ώστε

(2) $\quad d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d(\mathcal{T}_i^{p\beta_1+q\gamma_1}(x), x_0) < \delta$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k, \ 1 \leq i \leq l$.

Από το Θεώρημα 4.4.1 υπάρχουν $\beta_2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma_2 \in \mathbb{Z}^*$ με $\beta_1 + \gamma_1 \prec \beta_2 + \gamma_2$, $dom^+(\beta_2) = \emptyset = dom^-(\gamma_2)$ ώστε

(3) $\quad d(\mathcal{T}_i^{p\beta_2+q\gamma_2}(x_0), x_0) < \delta_2$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k, \ 1 \leq i \leq l$.

Από τις σχέσεις $(1), (2)$ και (3) έχουμε

$(*)$ $\quad d(\mathcal{T}_i^m(x_0), x_0) < \delta$, όπου $m = p\beta_1 + q\gamma_1$ ή $p\beta_2 + q\gamma_2$ ή $p(\beta_1 + \beta_2) + q(\gamma_1 + \gamma_2)$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k, \ 1 \leq i \leq l$.

Έστω ότι έχουμε βρει $\beta_1, \ldots, \beta_n, \ \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ με $\beta_s + \gamma_s \prec \beta_{s+1} + \gamma_{s+1}$ για κάθε $s = 1, \ldots, n-1$, $dom^+(\beta_s) = \emptyset = dom^-(\gamma_s)$, $1 \leq s \leq n$ τέτοια ώστε η $(*)$ ισχύει για $m = p(\beta_{i_1} + \ldots + \beta_{i_s}) + q(\gamma_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_s})$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, $1 \leq i \leq l$ με $i_1 < \ldots < i_s \leq n$. Βρίσκουμε $\delta_{n+1} \leq \delta$ ώστε $d(x, x_0) < \delta_{n+1} \ \Rightarrow \ d(\mathcal{T}_i^m(x), x_0) < \delta$ για τα προηγούμενα m, $1 \leq i \leq l$. Από το Θεώρημα 4.4.1 υπάρχουν $\beta_{n+1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma_{n+1} \in \mathbb{Z}^*$ με $\beta_n + \gamma_n \prec \beta_{n+1} + \gamma_{n+1}$, $dom^+(\beta_{n+1}) = \emptyset = dom^-(\gamma_{n+1})$ ώστε $d(\mathcal{T}_i^{p\beta_{n+1}+q\gamma_{n+1}}(x_0), x_0) < \delta_2$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k, \ 1 \leq i \leq l$. Τότε, η σχέση $(*)$ ισχύει αν στη θέση του m θέσουμε $m + p\beta_{n+1} + q\gamma_{n+1}$ ή $p\beta_{n+1} + q\gamma_{n+1}$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$. Επαγωγικά, έχουμε ότι το σύνολο $R = \{p(\beta_{i_1} + \ldots + \beta_{i_s}) + q(\gamma_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_s}), \ 0 \leq p, q \leq k$ με $i_1 < \ldots < i_s\}$ περιέχεται στο R_δ. $\square$

4.5 Κάποιες εφαρμογές

Στην τελευταία αυτή ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 4.3.3 όχι μόνο στην τοπολογία αλλά και στις διοφαντικές προσεγγίσεις και στη θεωρία αριθμών.

Κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{Q}^l, l \in \mathbb{N}$ αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση από το $\mathbb{Q}^l$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο και αντίστροφα. Για κάθε τέτοια συνάρτηση έχουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.3.3. Ανάλογα με την [Fu] (Θεώρημα 2.9 και Λήμμα 2.11) μπορούμε να το γενικεύσουμε αυτό σε συναρτήσεις με τιμές σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο.

Θεώρημα 4.5.1. *Έστω $l \in \mathbb{N}, k_1 < k_2$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί και έστω $f : \mathbb{Q}^l \to X$ τυχαία συνάρτηση με τιμές στο συμπαγή μετρικό χώρο X. Για κάθε $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$ και $F \in [\mathbb{Q}^l]^{<\omega}_{>0}$ υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Q}^l, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $diam(f(\alpha + (p\beta + q\gamma)F)) < \varepsilon$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$.*

Απόδειξη. Έστω $X = \bigcup_{i=1}^r U_i, r \in \mathbb{N}$ όπου $diam(U_i) < \varepsilon$ για κάθε $1 \leq i \leq r$. Τότε $\mathbb{Q}^l = \bigcup_{i=1}^r f^{-1}(U_i)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.3 σε αυτή τη διαμέριση, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θα δώσουμε τώρα μια εφαρμογή του Θεωρήματος 4.5.1 στις διοφαντικές προσεγγίσεις.

Έστω δ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός και $f(q) = e^{i\pi q^2 \delta},\ q \in \mathbb{Q}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.1, για $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, και $k_1 < k_2$ τυχαίους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $|f(\alpha) - f(\alpha + (p\beta + q\gamma))| < \varepsilon$ και $|f(\alpha) - f(\alpha + 2(p\beta + q\gamma))| < \varepsilon$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$.

Τότε, αν $h \equiv h(p,q) = p\beta + q\gamma$ έχουμε από τις προηγούμενες σχέσεις

$$|1 - e^{i(2\alpha h + h^2)\pi\delta}| < \varepsilon \text{ και } |1 - e^{i(4\alpha h + 4h^2)\pi\delta}| < \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $\cos(x) \leq 1$ για κάθε x, έχουμε $|1 - e^{2ix}| \leq 2|1 - e^{ix}|$. Τότε, γράφοντας $2h^2\pi\delta = [(4\alpha h + 4h^2) - 2(2\alpha h + h^2)]\pi\delta$, έχουμε

$$|1 - e^{2ih^2\pi\delta}| \leq 2|1 - e^{i(2\alpha h + h^2)\pi\delta}| + |1 - e^{i(4\alpha h + 4h^2)\pi\delta}| < 3\varepsilon.$$

Άρα, θέτοντας $\xi \equiv \xi(p,q) = h^2\delta - [h^2\delta]$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$, έχουμε

$$|1 - e^{2\pi i\xi}| < 3\varepsilon \iff 2\sin(\pi\xi) < 3\varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, έχουμε:

(i) Αν $\pi\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε για $m \equiv m(p,q) = [h^2\delta]$ έχουμε $|h^2\delta - m| < \varepsilon$.

(ii) Αν $\pi\xi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ τότε $\pi - \pi\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, άρα για $m \equiv m(p,q) = [h^2\delta] + 1$ έχουμε $|h^2\delta - m| < \varepsilon$.

Συνοψίζοντας, υπάρχει $m(p,q) \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $|\delta(p\beta + q\gamma)^2 - m(p,q)| < \varepsilon$ για κάθε $0 \leq p, q \leq k$.

Άρα, ως πόρισμα του προηγούμενου, έχουμε (για $p = 0$) ότι για κάθε δ πραγματικό αριθμό μπορούμε να λύσουμε την $|\delta n^2 - m| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ (αποτέλεσμα που πρωτοαποδείχθηκε από τους Hardy και Littlewood).

Για μια δεύτερη εφαρμογή, θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ των πραγματικων αριθμών modulo 1. Θεωρούμε την απόσταση από τον κοντινότερο ακέραιο $\|x\| =$

$\inf_{n\in\mathbb{Z}}|x-n|$. Έστω οικογένεια σημείων $\{\theta_q\}_{q\in\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}, k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, $\varepsilon > 0$ και $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ με $f(p,q) = p\theta_q$. Από το Θεώρημα 4.5.1, για το σύνολο $F = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ έχουμε ότι υπάρχουν $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{Q}^2$ και $\beta \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $diam(f(\tilde{\alpha} + (p\beta + q\gamma)F)) < \varepsilon$ για κάθε $0 \le p,q \le k$. Αν $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $m(p,q) = \alpha_2 + (p\beta + q\gamma)$ και $n(p,q) = \alpha_2 + 2(p\beta + q\gamma)$ για $0 \le p,q \le k$, τότε έχουμε

$$\|(\alpha + m(p,q))\theta_{m(p,q)} - (\alpha + n(p,q))\theta_{m(p,q)}\| < \varepsilon \text{ και}$$
$$\|(\alpha + m(p,q))\theta_{n(p,q)} - (\alpha + n(p,q))\theta_{n(p,q)}\| < \varepsilon \text{ για κάθε } 0 \le p,q \le k.$$

$$\text{Άρα, } \|(n(p,q) - m(p,q))\theta_{m(p,q)}\| < \varepsilon \text{ και } \|(n(p,q) - m(p,q))\theta_{n(p,q)}\| < \varepsilon,$$
$$\text{ή } \|(p\beta + q\gamma)\theta_{m(p,q)}\| < \varepsilon \text{ και } \|(p\beta + q\gamma)\theta_{n(p,q)}\| < \varepsilon \text{ για κάθε } 0 \le p,q \le k.$$

Ως συνέπεια του προηγούμενου έχουμε ότι αν $\theta_n \equiv \lambda^n$, με $\lambda > 1$ πραγματικό αριθμό, τότε υπάρχει για κάθε $0 \le p,q \le k$ ακέραιος $s(p,q) \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$|(n(p,q) - m(p,q))(\lambda^{n(p,q)} - \lambda^{m(p,q)}) - s(p,q)| < \varepsilon, \text{ ή}$$
$$|(p\beta + q\gamma)(\lambda^{n(p,q)} - \lambda^{m(p,q)}) - s(p,q)| < \varepsilon \text{ για κάθε } 0 \le p,q \le k.$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την πολυδιάστατη έκφραση του Θεωρήματος 4.5.1.

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $l_1,\dots,l_s \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Έστω $f_1 : \mathbb{Q}^{l_1} \to X_1,\dots,f_s : \mathbb{Q}^{l_s} \to X_s$, s τυχαίες συναρτήσεις με τιμές στους συμπαγείς μετρικούς χώρους $X_1,\dots,X_s$ αντίστοιχα. Για κάθε $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$ και $F_1 \in [\mathbb{Q}^{l_1}]^{<\omega}_{>0},\dots,F_s \in [\mathbb{Q}^{l_s}]^{<\omega}_{>0}$ υπάρχουν $\alpha_i \in \mathbb{Q}^{l_i}, 1 \le i \le s$, $\beta \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ και $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $diam(f_i(\alpha_i + (p\beta+q\gamma)F_i)) < \varepsilon$ για κάθε $0 \le p,q \le k$, $1 \le i \le s$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση γινόμενο $f_1 \times \ldots \times f_s : \mathbb{Q}^{l_1+\dots+l_s} \to X_1 \times \ldots \times X_s$ και το πεπερασμένο σύνολο $F = F_1 \times \ldots \times F_s$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.5.1. □

Στη συνέχεια δίνουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 4.5.2 στη θεωρία αριθμών.

Έστω πραγματικό πολυώνυμο $\pi(x)$ με $\pi(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ και $k_1 < k_2$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\beta \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ και ακέραιοι $m(p,q)$, $0 \le p,q \le k$ ώστε $|\pi(p\beta+q\gamma) - m(p,q)| < \varepsilon$ για κάθε $0 \le p,q \le k$.

Έστω $\pi(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x$. Γράφουμε $\pi(x) = s_n A_n x^n + \ldots + s_1 A_1 x$, με $A_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} j^r$, $r = 1, \ldots, n$ (όπου $\binom{r}{j} = \frac{r!}{j!(r-j)!}$).

Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ των πραγματικών αριθμών modulo 1. Θεωρούμε την απόσταση από τον κοντινότερο ακέραιο $\|x\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|$. Για κάθε $r = 1, \ldots, n$ θέτουμε $f_r(q) = s_r q^r (mod 1)$. Από το Θεώρημα 4.5.2 βρίσκουμε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^*$ με $dom^+(\beta) = \emptyset = dom^-(\gamma)$, $\max dom^-(\beta) < k_1 < k_2 < \min dom^+(\gamma)$ ώστε

$$\|f_r(\alpha_r + j(p\beta + q\gamma)) - f_r(\alpha_r)\| < \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ j = 1, \ldots, r,\ 0 \le p, q \le k.$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε με επαγωγή ότι $\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} (x+jy)^r = A_r y^r$, έτσι, έχουμε ότι $\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} f_r(\alpha_r + j(p\beta + q\gamma)) = A_r f_r(p\beta + q\gamma)$ για κάθε $0 \le p, q \le k$. Καθώς,

$$\textstyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} f_r(\alpha_r) = 0 \text{ και } \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} = 2^r,$$

έχουμε ότι $\|A_r f_r(p\beta + q\gamma)\| < \frac{2^r \varepsilon}{2^{n+1}}$, $r = 1, \ldots, n$ και συνεπώς

$$\|\pi(p\beta + q\gamma)\| < \left(\textstyle\sum_{r=1}^{n} 2^r\right) \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon \text{ για κάθε } 0 \le p, q \le k,$$

απο όπου έπεται το ζητούμενο.

Ως πόρισμα του προηγούμενου, έχουμε (για $p = 0$) ότι για κάθε πραγματικό πολυώνυμο $\pi(x)$ με $\pi(0) = 0$ και $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε ακεραίους m, n με $|\pi(n) - m| < \varepsilon$ (αποτέλεσμα που πρωτοαποδείχθηκε από τους Hardy και Weyl).

Κεφάλαιο 5

Διαμεριστικά συστήματα και τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται τα διαμεριστικά συστήματα (Ορισμός 5.1.3) προκειμένου να ενοποιηθούν δομές (όπως λέξεις, ημιομάδες, πεπερασμένα υποσύνολα των φυσικών) για τις οποίες μπορεί να αποδειχθεί μια θεωρία Ramsey. Στόχος είναι να αποδειχθούν διαμεριστικά θεωρήματα για διαμεριστικά συστήματα και να δούμε τις εκφράσεις αυτών μέσω της θεωρίας των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων. Ως συνέπεια των αποτελεσμάτων αυτών παίρνουμε αποτελέσματα για αυθαίρετες άπειρες ημιομάδες $(X,+)$ με ψηφιακή αναπαράσταση (digital representation) μια οικογένεια $< D_i >_{i\in I}$, όπου I είναι ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο, (όπου κάθε D_i είναι μη κενό υποσύνολο του X και κάθε στοιχείο του X αναπαρίσταται μοναδικά στη μορφή $\sum_{i\in H} x_i$ όπου H είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I, κάθε $x_i \in D_i$ και τα αθροίσματα θεωρούνται με αύξουσα σειρά δεικτών (Ορισμός 5.4.1)) οι οποίες ορίστηκαν στην [FeHS].

Για ένα μη κενό σύνολο Σ, I ένα μη κενό γραμμικά διατεταγμένο σύνολο και $(D_i)_{i\in I}$ μη κενά πεπερασμένα υποσύνολα του Σ, εισάγουμε την γενική έννοια των $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεων.

Αναπτύσουμε μια θεωρία Ramsey για $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεις, επεκτείνοντας θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας Ramsey από τις [H], [M], [T], [C], [BBH], [FN1], [FN2] και [F4]. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε:

(1) Γενικά διαμεριστικά θεωρήματα για τυχαίες ημιομάδες στα Θεωρήματα 5.1.1 και 5.1.5 (σε ισχυρότερη μορφή).

(2) Το πολυδιάστατο ανάλογο του Θεωρήματος 5.1.5 (Θεώρημα 5.2.1).

(3) Ένα γενικό πολυμεταβλητό διαμεριστικό, για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ, θεώρημα για ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$,

όπου I είναι ένα μη κενό γραμμικά διατεταγμένο σύνολο και D_i είναι μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του X για κάθε $i \in I$ (Θεώρημα 5.4.3).

Ακόμα, αν το I έχει την επιπλέον ιδιότητα για κάθε $i \in I$ να υπάρχει $j \in I$ με $i < j$, τότε παίρνουμε, ως εφαρμογές των προηγούμενων, μέσω της θεωρίας των τοπολογικών δυναμικών συστημάτων, αποτελέσματα που γενικεύουν αυτά της Παραγράφου 1 του Κεφαλαίου 3.

5.1 Ένα γενικό διαμεριστικό θεώρημα για ημιομάδες

Θεώρημα 5.1.1 (Διαμεριστικό θεώρημα για ημιομάδες). *Έστω $(X,+)$ άπειρη ημιομάδα, $V \subseteq X$ αμφίπλευρο ιδεώδες της $(X,+)$, $C \subseteq X$ μη-κενή υποημιομάδα της $(X,+)$, $R \subseteq X \times X$ μια σχέση στο X και $(T_p)_{p\in J}$ οικογένεια από συναρτήσεις, όπου J είναι ένα αυθαίρετο σύνολο, με $T_p : X \longrightarrow X$ για κάθε $p \in J$ τέτοιο ώστε:*

(i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ υπάρχει $y \in C$ και $z \in V$ τέτοια ώστε $(x_i, y) \in R$, $(x_i, z) \in R$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $T_p(z) \in C$ για κάθε $p \in J$,

(ii) αν $(x,y) \in R$ και $(x+y, z) \in R$, τότε $(x, y+z) \in R$,

(iii) $(x,x) \notin R$ για κάθε $x \in X$,

(iv) $T_p(x+y) = T_p(x) + T_p(y)$ για κάθε $(x,y) \in R$ και $p \in J$,

(v) $T_p(x) = x$ για κάθε $x \in C$ και $p \in J$, και

(vi) αν $(x,y) \in R$, τότε $(x, T_p(y)) \in R$ για κάθε $p \in J$.

Έστω $\theta \notin J$ και $T_\theta : X \longrightarrow X$ με $T_\theta(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Αν $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ και $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$ για $r, s \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του J και κάθε $x \in V$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ με $(x, x_n) \in R$, $(x_n, x_{n+1}) \in R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε

$$T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in V_{i_0},$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $p_i \in F_{n_i} \cup \{\theta\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $\theta \in \{p_1, \ldots, p_\lambda\}$, και

$$T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in C_{j_0},$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $p_i \in F_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα της θεωρίας των δεξιά συμπαγών ημιομάδων και της θεωρίας των υπερφίλτρων (βλέπε Κεφάλαιο 1).

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Η $(X,+)$ είναι ημιομάδα, άρα η $(\beta X,+)$ έχει τη δομή μιας δεξιά συμπαγούς ημιομάδας. Για κάθε $A \subseteq X$ και $x \in X$ θέτουμε

$$A_x = \{u \in A : \ (x,u) \in R\} \text{ και } \theta A = \bigcap\{(A_x)^* : \ x \in X\},$$

όπου $(A_x)^* = \{\mu \in \beta X : \mu(A_x) = 1\}$. Για ευκολία, γράφουμε $x <_R u$ αντί του $(x,u) \in R$. Έστω $V_* = \{x \in V : \ T_p(x) \in C \ \text{ για κάθε } p \in J\}$.

Ισχυρισμός 1 Τα $\theta X, \theta V, \theta C, \theta V_*$ είναι μη-κενές δεξιά συμπαγείς υποημιομάδες της βX και αποτεκούνται από μη-τετριμμένα υπερφίλτρα του X.

Πράγματι, έστω $A \in \{X, V, C, V_*\}$. Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $(A_x)^* = \beta X \setminus (X \setminus A_x)^*$ είναι συμπαγές υποσύνολο της βX , άρα το θA είναι συμπαγές υποσύνολο της βX. Σύμφωνα με την ιδιότητα (i), για κάθε $x \in X$ έχουμε $A_x \neq \emptyset$ και συνεπώς $(A_x)^* \neq \emptyset$. Ακόμα, πάλι από την (i), η οικογένεια $\{(A_x)^* : x \in X\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, συνεπώς $\theta A \neq \emptyset$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) έχουμε ότι η $(\theta A, +)$ είναι ημιομάδα. Πράγματι, για $\mu_1, \mu_2 \in \theta A$ και $x \in X$,
$(\mu_1 + \mu_2)(A_x) = \mu_1(\{u_1 \in A_x : \mu_2(\{u_2 \in A_{x+u_1} : u_1 + u_2 \in A_x\}) = 1\}) =$
$\mu_1(\{u_1 \in A_x : \mu_2(A_{x+u_1}) = 1\}) = \mu_1(A_x) = 1$.
Συνεπώς, η θA είναι μια μη-κενή δεξιά συμπαγής υποημιομάδα της βX. Καθώς $x \notin A_x$ (ιδιότητα (iii)), έχουμε ότι κάθε $\mu \in \theta A$ είναι μη-τετριμμένο υπερφίλτρο του X.

Παρατηρούμε ότι $\theta V_* \subseteq \theta V \subseteq \theta X$ και ότι $\theta C \subseteq \theta X$. Καθώς V είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της X, το θV είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της θX. Πράγματι, για $\mu_1 \in \theta V$, $\mu_2 \in \theta X$ και $x \in X$,
$(\mu_1 + \mu_2)(V_x) = \mu_1(\{u_1 \in V_x : \mu_2(\{u_2 \in X_{x+u_1} : u_1 + u_2 \in V_x\}) = 1\}) =$
$\mu_1(\{u_1 \in V_x : \mu_2(X_{x+u_1}) = 1\}) = \mu_1(V_x) = 1 = (\mu_2 + \mu_1)(V_x)$.

Για $p \in J$ έστω συνάρτηση $\beta T_p : \beta X \longrightarrow \beta X$ με $\beta T_p(\mu)(A) = \mu((T_p)^{-1}(A))$ για κάθε $\mu \in \beta X$ και $A \subseteq X$. Παρατηρούμε ότι:

(a) η συνάρτηση βT_p είναι συνεχής, καθώς $(\beta T_p)^{-1}(A^*) = ((T_p)^{-1}(A))^*$,

(b) $\beta T_p(\mu) = \mu$ για κάθε $\mu \in \theta C$, διότι, σύμφωνα με την ιδιότητα (v), για κάθε $\mu \in \theta C$ και $A \subseteq X$ έχουμε $\beta T_p(\mu)(A) = \mu(\{u \in C : T_p(u) = u \in A\}) = \mu(A \cap C) = \mu(A)$,

(c) $\beta T_p(\theta X) \subseteq \theta X$, καθώς, σύμφωνα με την ιδιότητα (vi), για $\mu \in \theta X$ και $x \in X$ ισχύει $\beta T_p(\mu)(X_x) = \mu(\{u \in X_x : T_p(u) \in X_x\}) = \mu(X_x) = 1$,

(d) ο περιορισμός της βT_p στο θX είναι ομομορφισμός, καθώς, σύμφωνα με την ιδιότητα (iv), για $\mu_1, \mu_2 \in \theta X$ και $A \subseteq X$
$\beta T_p(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(\{u_1 \in X : \mu_2(\{u_2 \in X_{u_1} : T_p(u_1 + u_2) \in A\}) = 1\}) =$

$\mu_1(\{u_1 \in X : \mu_2(\{u_2 \in X_{u_1} : T_p(u_1) + T_p(u_2) \in A\}) = 1\}) = [\beta T_p(\mu_1) + \beta T_p(\mu_2)](A)$, και

(e) $\theta V_* \subseteq \{\mu \in \theta V : \beta T_p(\mu) \in \theta C$ για κάθε $p \in J\}$, καθώς
$\theta V_* = \{\mu \in \beta X : \mu((V_*)_x) = 1$ για κάθε $x \in X\} =$
$\{\mu \in \beta X : \mu(\{u \in V_x : T_p(u) \in C_x$ για κάθε $p \in J\}) = 1$ για κάθε $x \in X\} \subseteq$
$\{\mu \in \beta X : \mu(V_x) = 1, \mu(T_p^{-1}(C_x)) = 1$ για κάθε $p \in J, x \in X\} =$
$\{\mu \in \theta V : \beta T_p(\mu)(C_x) = 1$ για κάθε $p \in J, x \in X\} =$
$\{\mu \in \theta V : \beta T_p(\mu) \in \theta C$ για κάθε $p \in J\}$.

Σύμφωνα με την [FuKa], υπάρχει ταυτοδύναμο μ_1 στη μη-κενή, δεξιά συμπαγή ημιομάδα θC ελαχιστικό για την θC. Έστω $\mathbf{V} = \{\mu \in \theta V : \beta T_p(\mu) \in \theta C$ για κάθε $p \in J\}$. Τότε $\emptyset \neq \theta V_* \subseteq \mathbf{V} \subseteq \theta V$, σύμφωνα με την (e). Καθώς θV είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της θX, το $\mathbf{V} + \mu_1$ είναι μη-κενή δεξιά συμπαγής υποημιομάδα της θX. Πράγματι, αν $\mu_2, \mu_3 \in \mathbf{V}$, τότε $(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_3 + \mu_1) = (\mu_2 + \mu_1 + \mu_3) + \mu_1$, όπου $\mu_2 + \mu_1 + \mu_3 \in \theta V$ και $\beta T_p(\mu_2 + \mu_1 + \mu_3) = \beta T_p(\mu_2) + \mu_1 + \beta T_p(\mu_3) \in \theta C$ για κάθε $p \in J$. Συνεπώς, υπάρχει ταυτοδύναμο $\mu_0 + \mu_1$, με $\mu_0 \in \mathbf{V}$, στη μη-κενή, δεξιά συμπαγή ημιομάδα $\mathbf{V} + \mu_1$. Θέτουμε $\mu = \mu_1 + \mu_0 + \mu_1$. Τότε το $\mu \in \theta V$ είναι ένα μη-τετριμμένο υπερφίλτρο του X, $\mu \in \mathbf{V}$ και $\mu \leq \mu_1$. Επειδή για κάθε $p \in J$ ο περιορισμός της βT_p στο θX είναι ομομορφισμός, έχουμε ότι $\beta T_p(\mu) \leq \beta T_p(\mu_1)$ για κάθε $p \in J$. Αλλά $\beta T_p(\mu_1) = \mu_1$ για κάθε $p \in J$, καθώς $\mu_1 \in \theta C$, συνεπώς, $\beta T_p(\mu) \leq \mu_1$ για κάθε $p \in J$. Καθώς το μ_1 είναι ελαχιστικό για τη θC και $\beta T_p(\mu) \in \theta C$ για κάθε $p \in J$, έχουμε $\beta T_p(\mu) = \mu_1$ για κάθε $p \in J$.

Συνοψίζοντας, υπάρχουν μη-τετριμμένα υπερφίλτρα $\mu \in \mathbf{V} \subseteq \theta V \subseteq \theta X \subseteq \beta X$ και $\mu_1 \in \theta C \subseteq \theta X \subseteq \beta X$ τέτοια ώστε: (1) $\mu + \mu = \mu$, $\mu_1 + \mu_1 = \mu_1$,
(2) $\mu_1 = \beta T_p(\mu)$ για κάθε $p \in J$, και (3) $\mu + \mu_1 = \mu_1 + \mu = \mu$.

Ισχυρισμός 2 Για κάθε $x \in V$, $B \subseteq V$ με $\mu(B) = 1$, $D \subseteq C$ με $\mu_1(D) = 1$ και F πεπερασμένο υποσύνολο του J, υπάρχουν $x_0 \in V$, $B_1 \subseteq B \subseteq V$ και $D_1 \subseteq D \subseteq C$ με $\mu(B_1) = 1$, $\mu_1(D_1) = 1$ τέτοια ώστε:

$x_0 \in B$, $(x, x_0) \in R$, $T_p(x_0) \in D$ για κάθε $p \in F$,

$B_1 = \{u \in B_{x_0} : x_0 + u \in B$ και $T_p(x_0) + u \in B$ για κάθε $p \in F\}$, και

$D_1 = \{z \in D_{x_0} : x_0 + z \in B$ και $T_p(x_0) + z \in D$ για κάθε $p \in F\}$.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 έπεται από τις ιδιότητες (1), (2) και (3) των υπερφίλτρων $\mu \in \theta V \subseteq \beta X$ και $\mu_1 \in \theta C \subseteq \beta X$ καθώς $\mu_1 = \beta T_p(\mu) = \beta T_p(\mu) + \mu_1$ και $\mu = \mu + \mu = \beta T_p(\mu) + \mu = \mu + \mu_1$ για κάθε $p \in F$.

Θα κατασκευάσουμε, με επαγωγή στο n, τη ζητούμενη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$. Καθώς, $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ και $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $\mu(V_{i_0}) = 1$ και $\mu_1(C_{j_0}) = 1$. Έστω $x \in V$. Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2, ξεκινώντας με $x \in V$, $B_1 = V_{i_0}$ και $D_1 = C_{j_0}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία $x <_R x_1 <_R x_2 <_R \ldots$ στο V και δύο φθίνουσες ακολουθίες $V \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, και $C \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \ldots$

τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύουν:
$\mu(B_n) = 1$ και $\mu_1(D_n) = 1$, $x_n \in B_n$ και $T_p(x_n) \in D_n$ για κάθε $p \in F_n$,
$B_{n+1} = \{u \in (B_n)_{x_n} : x_n + u \in B_n$ και $T_p(x_n) + u \in B_n$ για κάθε $p \in F_n\}$,
και
$D_{n+1} = \{z \in (D_n)_{x_n} : x_n + z \in B_n$ και $T_p(x_n) + z \in D_n$ για κάθε $p \in F_n\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Θα αποδείξουμε, με επαγωγή στο λ, ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in B_{n_1} \subseteq B_1 = V_{i_0},$$

για κάθε $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $p_i \in F_{n_i} \cup \{\theta\}$ για $1 \leq i \leq \lambda$ και $\theta \in \{p_1, \ldots, p_\lambda\}$, και

$$T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in D_{n_1} \subseteq D_1 = C_{j_0},$$

για κάθε $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $p_i \in F_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.

Πράγματι, για $n_1 \in \mathbb{N}$ και $p_1 \in F_{n_1}$, έχουμε $x_{n_1} \in B_{n_1}$ και $T_{p_1}(x_{n_1}) \in D_{n_1}$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $\lambda \geq 1$ και έστω $n_1 < \ldots < n_\lambda < n_{\lambda+1} \in \mathbb{N}$ και $p_i \in F_{n_i} \cup \{\theta\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda + 1$.
Περίπτωση 1 Έστω $\theta \in \{p_2, \ldots, p_{\lambda+1}\}$. Τότε $u = T_{p_2}(x_{n_2}) + \ldots + T_{p_{\lambda+1}}(x_{n_{\lambda+1}}) \in B_{n_2} \subseteq B_{n_1+1}$, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση. Άρα,
$T_{p_1}(x_{n_1}) + u = T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_{\lambda+1}}(x_{n_{\lambda+1}}) \in B_{n_1}$.
Περίπτωση 2 Έστω $\theta \notin \{p_2, \ldots, p_{\lambda+1}\}$. Τότε $z = T_{p_2}(x_{n_2}) + \ldots + T_{p_{\lambda+1}}(x_{n_{\lambda+1}}) \in D_{n_2} \subseteq D_{n_1+1}$, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση. Αν $p_1 = \theta$, τότε $x_{n_1} + z = T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_{\lambda+1}}(x_{n_{\lambda+1}}) \in B_{n_1}$.
Αν $p_1 \in F_{n_1}$, τότε $T_{p_1}(x_{n_1}) + z = T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_{\lambda+1}}(x_{n_{\lambda+1}}) \in D_{n_1}$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.1.2. *Χρησιμοποιώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1, μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε υποσύνολο A μιας ημιομάδας C με $\mu(A) = 1$ για $\mu \in \theta C$ ελαχιστικό για τη βC, υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ με $x <_R x_n <_R x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε*

$$T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in A,$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $p_i \in F_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$, καθώς $K(\theta C) = K(\beta C) \cap \theta C$.

Στο σημείο αυτό, δείνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.1.3. *Καλούμε την εξάδα $(X, V, C, R, (T_p)_{p\in J}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}})$* **διαμεριστικό σύστημα** *αν $(X, +)$ είναι άπειρη ημιομάδα, $V \subseteq X$ είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της $(X, +)$, $C \subseteq X$ είναι μη-κενή υποημιομάδα της $(X, +)$, $R \subseteq X \times X$ είναι σχέση στο X και $T_p : X \longrightarrow X$ για κάθε $p \in J$ συναρτήσεις, όπου J είναι* *τυχαίο σύνολο, τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες (i)-(vi) του Θεωρήματος 5.1.1 και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία από μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του J.*

Το απλούστερο διαμεριστικό σύστημα για μια άπειρη ημιομάδα $(X,+)$ μπορεί να οριστεί για $V = C = X$, $J = \{1\}$, $R = X \times X$ και $T_1 : X \longrightarrow X$ με $T_1(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.1 στο σύστημα αυτό, παίρνουμε το θεμελιώδες θεώρημα του Hindman [H]. Ακόμα, αν στην ημιομάδα $(X,\cup)$, όπου X είναι το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, ορίζουμε, για $x_1 = \{k_1 < \ldots < k_m\}$, $x_2 = \{l_1 < \ldots < l_n\} \in X$, $x_1 <_R x_2 \;\Leftrightarrow\; k_m < l_1$, παίρνουμε τη μορφή του θεωρήματος του Hindman που έδωσε ο Baumgartner στην [B]. Στη συνέχεια, ορίζουμε κάποια πιο πολύπλοκα διαμεριστικά συστήματα.

Παραδείγματα 5.1.4. (1) *Έστω αυθαίρετο σύνολο Σ και $(I,<)$ ένα μη-κενό γραμμικά διατεταγμένο σύνολο. Για κάθε $i \in I$, έστω $D_i = \{d_{1,i},\ldots,d_{k_i,i}\}$, όπου $k_i \in \mathbb{N}$ είναι η πληθηκότητα του D_i για κάθε $i \in I$, μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του Σ. Ορίζουμε το σύνολο των (σταθερών) $(D_i)_{i\in I}$-***located λέξεων***:*

$$C = L((D_i)_{i\in I}) = \{w = w_{i_1}\ldots w_{i_l} : \ l \in \mathbb{N}, i_1 < \ldots < i_l \in I \text{ και } w_{i_j} \in D_{i_j} \\ \text{για κάθε } 1 \le j \le l\}.$$

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m \notin D_i$ για κάθε $i \in I$ να είναι **μεταβλητές**. *Ορίζουμε το σύνολο των $(D_i)_{i\in I}$-***located λέξεων με μεταβλητή***:*

$$V = L((D_i)_{i\in I};\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m) = \{w = w_{i_1}\ldots w_{i_l} : \ l \in \mathbb{N}, i_1 < \ldots < i_l \in I, \\ w_{i_j} \in D_{i_j} \cup \{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m\} \text{ για κάθε } 1 \le j \le l \text{ και υπάρχουν } 1 \le j_1,\ldots,j_m \le l \\ \text{με } w_{i_{j_1}} = \upsilon_1,\ldots,w_{i_{j_m}} = \upsilon_m\}.$$

Έστω $L = V \cup C$. Για $w = w_{i_1}\ldots w_{i_l} \in L$, το σύνολο $dom(w) = \{i_1 < \ldots < i_l\} \subseteq I$ είναι το **πεδίο ορισμού** *της w. Εφοδιάζουμε το σύνολο L με μια πράξη $\star$ ορίζοντας για $w = w_{i_1}\ldots w_{i_l}$, $u = u_{t_1}\ldots u_{t_r} \in L$*

$$w \star u = z_{q_1}\ldots z_{q_s} \in L,$$

όπου $\{q_1,\ldots,q_s\} = \{i_1,\ldots,i_l\} \cup \{t_1,\ldots,t_r\}$ με $q_1 < \ldots < q_s$ και, για $1 \le j \le s$, $z_{q_j} = w_{q_j}$ αν $q_j \notin \{t_1,\ldots,t_r\}$, $z_{q_j} = u_{q_j}$ αν $q_j \notin \{i_1,\ldots,i_l\}$, $z_{q_j} = \upsilon_n$, για $1 \le n \le m$ στην περίπτωση είτε $w_{q_j} = \upsilon_n$ και $u_{q_j} \in D_{q_j} \cup \{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$ ή $u_{q_j} = \upsilon_n$ και $w_{q_j} \in D_{q_j} \cup \{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$, και $z_{q_j} = d_{\max\{\mu,\nu\},q_j}$ αν $q_j \in \{i_1,\ldots,i_l\} \cap \{t_1,\ldots,t_r\}$ και $w_{q_j} = d_{\mu,q_j}$, $u_{q_j} = d_{\nu,q_j}$. Τότε $(L,\star)$ είναι ημιομάδα, C είναι μη-κενή υποημιομάδα της $(L,\star)$ και V είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της $(L,\star)$.

Για $w,u \in L$ ορίζουμε τη σχέση

$$w <_{R_2} u \Longleftrightarrow \max dom(w) < \min dom(u).$$

Ακόμα, ορίζουμε τις συναρτήσεις $T_{(p_1,\ldots,p_m)} : L \longrightarrow L$ *για κάθε* $(p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{N}^m$ *θέτοντας για* $w = w_{i_1} \ldots w_{i_l} \in L$ *και* $(p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{N}^m$, $T_{(p_1,\ldots,p_m)}(w) = u_{i_1} \ldots u_{i_l}$ *, όπου, για* $1 \leq j \leq l$, *θέτουμε* $u_{i_j} = w_{i_j}$ *αν* $w_{i_j} \in D_{i_j}$ *και* $u_{i_j} = d_{p_r,i_j}$ *αν* $w_{i_j} = \upsilon_r$ *για* $1 \leq r \leq m$ *και* $p_r \leq k_{i_j}$, $u_{i_j} = d_{k_{i_j},i_j}$ *αν* $w_{i_j} = \upsilon_r$ *για* $1 \leq r \leq m$ *και* $p_r > k_{i_j}$.

Αν L *είναι άπειρο σύνολο, τότε το* $\big(L, V, C, P, (T_{(p_1,\ldots,p_m)})_{(p_1,\ldots,p_m)\in\mathbb{N}^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ *είναι διαμεριστικό σύστημα, για κάθε αύξουσα ακολουθία* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *από μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του* $\mathbb{N}^m$.

(2) *Έστω ένα τυχαίο σύνολο* Σ *και* $I = \mathbb{Z}$. *Για* $n \in \mathbb{Z}$ *έστω* $D_n = \{d_{1,n}, \ldots, d_{k_n,n}\} \subseteq \Sigma$ *για* $n \geq 0$, *και* $D_n = \{d_{-k_n,n}, \ldots, d_{-1,n}\} \subseteq \Sigma$ *για* $n < 0$, *όπου* $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N}$. *Έστω* $C = L((D_n)_{n\in\mathbb{Z}})$, $V = L((D_n)_{n\in\mathbb{Z}}; \upsilon_1, \ldots, \upsilon_m)$, *για* $m \in \mathbb{N}$, *και* $X = V \cup C$. *Ακόμα, έστω*

$$\begin{gathered} V_0 = \{w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} \in L((D_n)_{n\in\mathbb{Z}}; \upsilon_1, \ldots, \upsilon_m) : \exists\, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m \in \\ \{n_1, \ldots, n_l\} \text{ με } \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \mathbb{N},\ \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq \mathbb{Z}^- \text{ και} \\ w_{i_1} = \upsilon_1 = w_{j_1}, \ldots, w_{i_m} = \upsilon_m = w_{j_m}\}. \end{gathered}$$

Εφοδιάζουμε το σύνολο X *με τη σχέση* R_1 *ορίζοντας για* $x, u \in X$

$$\begin{gathered} x <_{R_1} u \Longleftrightarrow dom(u) = A_1 \cup A_2 \text{ με } A_1, A_2 \neq \emptyset \text{ τέτοια ώστε} \\ \max A_1 < \min dom(x) \leq \max dom(x) < \min A_2. \end{gathered}$$

Για κάθε $((p_1, q_1), \ldots, (p_m, q_m)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^m$ *ορίζουμε τις συναρτήσεις*

$$T_{((p_1,q_1),\ldots,(p_m,q_m))} : X \longrightarrow X.$$

Έστω $((p_1, q_1), \ldots, (p_m, q_m)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^m$ *και* $w = w_{n_1} \ldots w_{n_l} \in X$. *Θέτουμε* $T_{((p_1,q_1),\ldots,(p_m,q_m))}(w) = u_{n_1} \ldots u_{n_l}$, *όπου, για* $1 \leq i \leq l$, *θέτουμε* $u_{n_i} = w_{n_i}$ *αν* $w_{n_i} \in D_{n_i}$, *και στην περίπτωση* $w_{n_i} = \upsilon_j$ *για* $1 \leq j \leq m$, *θέτουμε* $u_{n_i} = d_{p_j,n_i}$ *αν* $n_i \geq 0$ *και* $p_j \leq k_{n_i}$, $u_{n_i} = d_{k_{n_i},n_i}$ *αν* $n_i \geq 0$ *και* $p_j > k_{n_i}$, $u_{n_i} = d_{-q_j,n_i}$ *αν* $n_i < 0$ *και* $q_j \leq k_{n_i}$, *και* $u_{n_i} = d_{-k_{n_i},n_i}$ *αν* $n_i < 0$ *και* $q_j > k_{n_i}$.

Τότε το $\big(X, V_0, C, R_1, (T_{((p_1,q_1),\ldots,(p_m,q_m))})_{((p_1,q_1),\ldots,(p_m,q_m))\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ *είναι διαμεριστικό σύστημα, για κάθε αύξουσα ακολουθία* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *από μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^m$.

(3) *Έστω ένα μη-κενό γραμμικά διατεταγμένο αλφάβητο* Σ *και* $(I, <)$ *ένα μη-κενό γραμμικά διατεταγμένο σύνολο. Ορίζουμε τις (σταθερές)* Σ-I-**located λέξεις**:

$$\begin{gathered} C = L(\Sigma\text{-}I) = \{w = w_{i_1} \ldots w_{i_l} : \ l \in \mathbb{N}, i_1 < \ldots < i_l \in I \text{ και } w_{i_j} \in \Sigma \text{ για} \\ \text{κάθε } 1 \leq j \leq l\}. \end{gathered}$$

Έστω $m \in \mathbb{N}$ *και* $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m \notin D_i$ *για κάθε* $i \in I$ **μεταβλητές**. *Ορίζουμε το σύνολο των* Σ-I-**located λέξεων με μεταβλητή**:

$$V = L(\Sigma\text{-}I; \upsilon_1, \ldots, \upsilon_m) = \{w = w_{i_1} \ldots w_{i_l} : \ l \in \mathbb{N}, i_1 < \ldots < i_l \in I, w_{i_j} \in \Sigma \cup \{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m\} \text{ για κάθε } 1 \leq j \leq l \text{ και υπάρχουν } 1 \leq j_1, \ldots, j_m \leq l \text{ με } w_{i_{j_1}} = \upsilon_1, \ldots, w_{i_{j_m}} = \upsilon_m\}.$$

Έστω $X = V \cup C$. Για $w = w_{i_1} \ldots w_{i_l} \in X$, το πεπερασμένο σύνολο $dom(w) = \{i_1 < \ldots < i_l\} \subseteq I$ είναι το **πεδίο ορισμού** *της w. Εφοδιάζουμε το σύνολο X με μια πράξη $\star$ ορίζοντας για $w = w_{i_1} \ldots w_{i_l}$, $u = u_{t_1} \ldots u_{t_r} \in X$*

$$w \star u = z_{q_1} \ldots z_{q_s} \in X,$$

όπου $\{q_1, \ldots, q_s\} = \{i_1, \ldots, i_l\} \cup \{t_1, \ldots, t_r\}$ με $q_1 < \ldots < q_s$ και, για $1 \leq j \leq s$, $z_{q_j} = w_{q_j}$ αν $q_j \notin \{t_1, \ldots, t_r\}$, $z_{q_j} = u_{q_j}$ αν $q_j \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$, $z_{q_j} = \upsilon_n$, για $1 \leq n \leq m$, στην περίπτωση που είτε $w_{q_j} = \upsilon_n$ και $u_{q_j} \in \Sigma \cup \{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n\}$ ή $u_{q_j} = \upsilon_n$ και $w_{q_j} \in \Sigma \cup \{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n\}$, και $z_{q_j} = \max\{w_{q_j}, u_{q_j}\}$ αν $q_j \in \{i_1, \ldots, i_l\} \cap \{t_1, \ldots, t_r\}$. Τότε $(X, \star)$ είναι ημιομάδα, C είναι μη-κενή υποημιομάδα και V αμφίπλευρο ιδεώδες της $(X, \star)$.

Για $w, u \in X$ ορίζουμε

$$w <_{R_2} u \Longleftrightarrow \max dom(w) < \min dom(u).$$

Ακόμα, ορίζουμε τις συναρτήσεις $T_{(p_1,\ldots,p_m)} : X \longrightarrow X$ για κάθε $(p_1, \ldots, p_m) \in \Sigma^m$ θέτοντας για $w = w_{i_1} \ldots w_{i_l} \in X$ και $(p_1, \ldots, p_m) \in \Sigma^m$, $T_{(p_1,\ldots,p_m)}(w) = u_{n_1} \ldots u_{n_l}$, όπου, για $1 \leq i \leq l$, θέτουμε $u_{n_i} = w_{n_i}$ αν $w_{n_i} \in \Sigma$ και $u_{n_i} = p_j$ αν $w_{n_i} = \upsilon_j$ για $1 \leq j \leq m$.

Αν X είναι άπειρο σύνολο, τότε το $\big(X, V, C, P, (T_{(p_1,\ldots,p_m)})_{(p_1,\ldots,p_m)\in\Sigma^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ είναι διαμεριστικό σύστημα, για κάθε αύξουσα ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του Σ^m.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα διαμεριστικό θεώρημα για διαμεριστικά συστήματα, ισχυρότερο από το Θεώρημα 5.1.1, παρουσιάζοντας πρώτα την ορολογία που θα χρειαστούμε.

Extracted Στοιχεία, Extractions

Έστω $(X, V, C, R, (T_p)_{p\in J}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ένα διαμεριστικό σύστημα και $T_\theta : X \to X$ με $T_\theta(x) = x$ για κάθε $x \in X$, για $\theta \notin J$. Για ένα υποσύνολο A της $(X, +)$ θέτουμε

$$[A]^\infty = \{\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ x_n \in A \text{ και } x_n <_R x_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Έστω ακολουθία $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$. Ένα **extracted στοιχείο με μεταβλητή** της $\vec{x}$ είναι ένα στοιχείο του V της μορφής

$$y = T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in V,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, $p_i \in F_{n_i} \cup \{\theta\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$ και $\theta \in \{p_1, \ldots, p_\lambda\}$.
Το σύνολο όλων των extracted στοιχείων με μεταβλητή του $\vec{x}$ συμβολίζεται με $EV(\vec{x})$.

Ένα **extracted** στοιχείο της $\vec{x}$ είναι ένα στοιχείο της C της μορφής

$$z = T_{p_1}(x_{n_1}) + \ldots + T_{p_\lambda}(x_{n_\lambda}) \in C,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $p_i \in F_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$.
Το σύνολο όλων των extracted στοιχείων της $\vec{x}$ συμβολίζεται με $E(\vec{x})$.

Αν $\vec{y} \in [EV(\vec{x})]^\infty$, τότε λέμε ότι η $\vec{y}$ είναι μια **extraction** της $\vec{x}$ και γράφουμε $\vec{y} \prec \vec{x}$. Παρατηρούμε ότι για $\vec{y}, \vec{x} \in [V]^\infty$ έχουμε $\vec{y} \prec \vec{x}$ αν και μόνο αν $EV(\vec{y}) \subseteq EV(\vec{x})$.

Θεώρημα 5.1.5. *Έστω $(X, V, C, R, (T_p)_{p\in J}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ένα διαμεριστικό σύστημα. Για $\theta \notin J$ θέτουμε $T_\theta : X \longrightarrow X$ με $T_\theta(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Αν $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ και $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, $r, s \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε ακολουθία $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ υπάρχει μια extraction $\vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{x}$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε*

$$EV(\vec{y}) \subseteq V_{i_0} \text{ και } E(\vec{y}) \subseteq C_{j_0}.$$

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση
$\phi : L((F_n)_{n\in\mathbb{N}}; \theta) \cup L((F_n)_{n\in\mathbb{N}}) \to EV(\vec{x}) \cup E(\vec{x})$ με

$$\phi(t_{n_1} \ldots t_{n_\lambda}) = T_{t_{n_1}}(x_{n_1}) + \ldots + T_{t_{n_\lambda}}(x_{n_\lambda}).$$

Η συνάρτηση ϕ είναι 1-1 και επί του $EV(\vec{x}) \cup E(\vec{x})$. Ακόμα, $\phi(L((F_n)_{n\in\mathbb{N}}; \theta)) = EV(\vec{x})$ και $\phi(L((F_n)_{n\in\mathbb{N}})) = E(\vec{x})$.

Το διαμεριστικό σύστημα $\big(L_1, V_1, C_1, R_1, (T^1_p)_{p\in\mathbb{N}}, (F^1_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, ορίζεται, σύμφωνα με το Παράδειγμα (1), θέτοντας $L_1 = L((F_n)_{n\in\mathbb{N}}; \theta) \cup L((F_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $V_1 = L((F_n)_{n\in\mathbb{N}}; \theta)$, $C_1 = L((F_n)_{n\in\mathbb{N}})$ και $F^1_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k_n\}$ αν $F_n = \{j_{1,n}, \ldots, j_{k_n,n}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.1, υπάρχει μια ακολουθία $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V_1]^\infty$ και $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $EV(\vec{s}) \subseteq \phi^{-1}(V_{i_0})$ και $E(\vec{s}) \subseteq \phi^{-1}(C_{j_0})$. Θέτουμε $y_n = \phi(s_n) \in EV(\vec{x})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η $\vec{y}$ είναι μια extraction της $\vec{x}$ τέτοια ώστε $EV(\vec{y}) \subseteq \phi(EV(\vec{s})) \subseteq V_{i_0}$ και $E(\vec{y}) \subseteq \phi(E(\vec{s})) \subseteq C_{j_0}$. □

Παρατήρηση 5.1.6. (*i*) *Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.5 στο διαμεριστικό σύστημα $\big(X, V, C, R, (T_p)_{p\in\Sigma}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, που είναι η περίπτωση του Παραδείγματος 5.1.4 (3) για Σ πεπερασμένο αλφάβητο, $I = \mathbb{N}$, $m = 1$ και $F_n = \Sigma$*

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, *παίρνουμε το διαμεριστικό θεώρημα για located λέξεις που αποδείχθηκε από τους Bergelson-Blass-Hindman στην [BBH].*

(ii) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.5 στο διαμεριστικό σύστημα $\big(X, V, C, R, (T_p)_{p\in\mathbb{N}}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, *που είναι η περίπτωση του Παραδείγματος 5.1.4 (1) για* $\Sigma = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *άπειρο αλφάβητο,* $I = \mathbb{N}$, $D_n = \{a_i : 1 \leq i \leq k_n\}$, *όπου* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *είναι αύξουσα ακολουθία,* $m = 1$ *και* $F_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k_n\}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *παίρνουμε το διαμεριστικό Θεώρημα 2.1.3 για τις* ω*-located λέξεις.*

(iii) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.5 στο διαμεριστικό σύστημα $\big(X, V, C, R, (T_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, *που είναι η περίπτωση του Παραδείγματος 5.1.4 (2) για* $\Sigma = \{\alpha_n : \ n \in \mathbb{Z}^*\}$, $I = \mathbb{Z}^*$, $D_n = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}$, $n > 0$, *και* $D_n = \{\alpha_{-k_n}, \ldots, \alpha_{-1}\}$ *για* $n < 0$, *όπου* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}, (k_{-n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *είναι αύξουσες ακολουθίες,* $m = 1$ *και* $F_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \leq p \leq k_n, 1 \leq q \leq k_{-n}\}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *παίρνουμε το διαμεριστικό Θεώρημα 2.1.4 για τις* ω-$\mathbb{Z}^*$*-located λέξεις.*

5.2 Πολυδιάστατα διαμεριστικά θεωρήματα για ημιομάδες

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε το ανάλογο πολυδιάστατο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.1.5. Έστω $(X, V, C, R, (T_p)_{p\in J}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ένα διαμεριστικό σύστημα. Για $l \in \mathbb{N}$ και $A \subseteq X$, θέτουμε

$[A]^l = \{(x_1, \ldots, x_l) : \ x_1 <_R \ldots <_R x_l \in A\}$,

$[A]^{<\infty} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ n \in \mathbb{N}, \ x_1 <_R \ldots <_R x_n \in A\} \cup \{\emptyset\}$, και

Για μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\infty}$ και $t \in X$, θέτουμε

$$\mathcal{F}(t) = \{\mathbf{x} \in [X]^{<\infty} : \text{είτε } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \neq \emptyset \text{ και } (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F} \\ \text{ή } \mathbf{x} = \emptyset \text{ και } (t) \in \mathcal{F}\}$$

και για $\mathcal{G} \subseteq [L]^{<\infty}$, $t \in L$

$\mathcal{G} - t = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} : \text{είτε } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \neq \emptyset \text{ και } t <_R x_1, \text{ ή } \mathbf{x} = \emptyset\}$,

$\vec{x} - t = (x_n)_{n\geq l} \in [V]^\infty$, όπου $l = \min\{n \in \mathbb{N} : \ t <_R x_n\}$.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω* $(X, V, C, R, (T_p)_{p\in J}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *διαμεριστικό σύστημα και* $l, r, s \in \mathbb{N}$. *Για* $\theta \notin J$ *θέτουμε* $T_\theta : X \longrightarrow X$ *με* $T_\theta(x) = x$ *για κάθε* $x \in X$. *Αν* $[V]^l = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ *και* $[C]^l = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, *τότε για κάθε ακολουθία* $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ *υπάρχει μια extraction* $\vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *της* $\vec{x}$ *και* $1 \leq i_0 \leq r$, $1 \leq j_0 \leq s$ *τέτοια ώστε*

$$[EV(\vec{y})]^l \subseteq V_{i_0} \text{ και } [E(\vec{y})]^l \subseteq C_{j_0}.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα διαγώνια επιχειρήματα (τα οποία αποτελούν γενικεύσεις των Λημμάτων 2.2.6 και 2.2.7).

Λήμμα 5.2.2. *Έστω* $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$*, και*

$$\Pi = \{(t, \vec{s}) : \ t \in C, \ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty \ \textit{με} \ \vec{s} \prec \vec{x} \ \textit{και} \ t <_R s_1\}.$$

Αν ένα υποσύνολο Λ *του* Π *ικανοποιεί*

(*i*) *για κάθε* $(t, \vec{s}) \in \Pi$*, υπάρχει* $(t, \vec{s}_1) \in \Lambda$ *με* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$*, και*

(*ii*) *για κάθε* $(t, \vec{s}) \in \Lambda$ *και* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$*, έχουμε* $(t, \vec{s}_1) \in \Lambda$*,*

τότε υπάρχει $\vec{y} \prec \vec{x}$*, τέτοια ώστε* $(t, \vec{s}) \in \Lambda$ *για κάθε* $t \in E(\vec{y})$ *και* $\vec{s} \prec \vec{y} - t$*.*

Απόδειξη. Έστω $y_0 = x_1$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχει $\vec{s}_1 = (s^1_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{x} - y_0$ τέτοιο ώστε $(T_{p_1}(y_0), \vec{s}_1) \in \Lambda$ για κάθε $p_1 \in F_1$. Έστω $y_1 = s^1_1$. Τότε, $y_0 <_R y_1$ και $y_0, y_1 \in EV(\vec{x})$. Υποθέτουμε ότι έχουν κατασκευαστεί $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \in [V]^\infty$ και $y_0, y_1, \dots, y_n \in EV(\vec{x})$, με $\vec{s}_n \prec \dots \prec \vec{s}_1 \prec \vec{x}$, $y_0 <_R y_1 <_R \dots <_R y_n$ και $(t, \vec{s}_i) \in \Lambda$ για κάθε $1 \le i \le n$ και $t \in E((y_0, \dots, y_{i-1}))$.

Θα κατασκευάσουμε $\vec{s}_{n+1}$ και y_{n+1}. Έστω $\{t_1, \dots, t_l\} = E((y_0, \dots, y_n))$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχουν $\vec{s}^{\,1}_{n+1}, \dots, \vec{s}^{\,l}_{n+1} \in [V]^\infty$ τέτοια ώστε $\vec{s}^{\,l}_{n+1} \prec \dots \prec \vec{s}^{\,1}_{n+1} \prec \vec{s}_n - y_n$ και $(t_i, \vec{s}^{\,i}_{n+1}) \in \Lambda$ για κάθε $1 \le i \le l$. Θέτουμε $\vec{s}_{n+1} = \vec{s}^{\,l}_{n+1}$. Αν $\vec{s}_{n+1} = (s^{n+1}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, θέτουμε $y_{n+1} = s^{n+1}_1$. Τότε $y_n <_R y_{n+1}$, $y_{n+1} \in EV(\vec{x})$ και, σύμφωνα με τη συνθήκη (ii), $(t_i, \vec{s}_{n+1}) \in \Lambda$ για κάθε $1 \le i \le l$.

Θέτουμε $\vec{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in [V]^\infty$. Τότε $\vec{y} \prec \vec{x}$, καθώς $y_0 <_R y_1 <_R \dots \in EV(\vec{x})$. Έστω $t \in E(\vec{y})$ και $\vec{s} \prec \vec{y} - t$. Θέτουμε $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \ t \in EV((y_0, y_1, \dots, y_n))\}$. Καθώς $t \in E((y_0, y_1, \dots, y_{n_0}))$, έχουμε $(t, \vec{s}_{n_0+1}) \in \Lambda$. Τότε, σύμφωνα με τη συνθήκη (ii), έχουμε $(t, \vec{y} - y_{n_0}) \in \Lambda$, καθώς $\vec{y} - y_{n_0} \prec \vec{s}_{n_0+1}$, και $(t, \vec{s}) \in \Lambda$, διότι $\vec{s} \prec \vec{y} - y_{n_0} = \vec{y} - t$. □

Λήμμα 5.2.3. *Έστω* $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$*, και*

$$\Pi = \{(t, \vec{s}) : \ t \in V, \ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty \ \textit{με} \ \vec{s} \prec \vec{x} \ \textit{και} \ t <_R s_1\}.$$

Αν ένα υποσύνολο Λ *του* Π *ικανοποιεί*

(*i*) *για κάθε* $(t, \vec{s}) \in \Pi$*, υπάρχει* $(t, \vec{s}_1) \in \Lambda$ *με* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$*, και*

(*ii*) *για κάθε* $(t, \vec{s}) \in \Lambda$ *και* $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$*, έχουμε* $(t, \vec{s}_1) \in \Lambda$*,*

τότε υπάρχει $\vec{y} \prec \vec{x}$*, τέτοια ώστε* $(t, \vec{s}) \in \Lambda$ *για κάθε* $t \in EV(\vec{y})$ *και* $\vec{s} \prec \vec{y} - t$*.*

Απόδειξη. Έστω $y_0 = x_1$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχει $\vec{s}_1 = (s^1_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{x} - y_0$ τέτοιο ώστε $(y_0, \vec{s}_1) \in \Lambda$. Έστω $y_1 = s^1_1$. Τότε, $y_0 <_R y_1$ και $y_0, y_1 \in EV(\vec{x})$. Η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί ανάλογα με αυτή του Λήμματος 5.2.2. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Για $l = 1$ το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 5.1.5. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για $l \in \mathbb{N}$. Έστω $t \in V$ και $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ με $\vec{s} \prec \vec{x}$ και $t <_R s_1$. Έχουμε ότι

$$[V]^{l+1}(t) = [V]^l \cap ([V]^{<\infty} - t).$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ και $1 \le i_0 \le r$ τέτοια ώστε $[V]^l \cap [EV(\vec{s}_1)]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}(t)$. Τότε έχουμε $\vec{s}_1 \prec \vec{s} \prec \vec{x}$ και $[V]^{l+1}(t) \cap [EV(\vec{s}_1)]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}(t)$. Έστω

$$\Lambda = \{(t,\vec{s}) :\ t \in V,\ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty,\ \vec{s} \prec \vec{x},\ t <_R s_1 \text{ και } [V]^{l+1}(t) \cap [EV(\vec{s})]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}(t)\}.$$

Η οικογένεια Λ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) (από τα προηγούμενα επιχειρήματα) και (ii) του Λήμματος 5.2.2, συνεπώς, υπάρχει $\vec{y}_1 \prec \vec{x}$ τέτοιο ώστε $(t,\vec{s}) \in \Lambda$ για κάθε $t \in EV(\vec{y}_1)$ και $\vec{s} \prec \vec{y}_1 - t$.

Έστω $\mathcal{F} = \{t \in EV(\vec{y}_1) :\ [V]^{l+1}(t) \cap [EV(\vec{y}_1 - t)]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}(t)\}$. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση ($l = 1$) υπάρχει μια extraction με μεταβλητή $\vec{y}_2 \prec \vec{y}_1$ της $\vec{y}_1$ τέτοια ώστε $EV(\vec{y}_2) \subseteq \mathcal{F}$. Καθώς $\vec{y}_2 \prec \vec{y}_1$ έχουμε ότι $EV(\vec{y}_2) \subseteq EV(\vec{y}_1)$, συνεπώς, $(t, \vec{y}_2 - t) \in \Lambda$ για κάθε $t \in EV(\vec{y}_2)$, έτσι $[V]^{l+1}(t) \cap [EV(\vec{y}_2 - t)]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}(t)$ για κάθε $t \in EV(\vec{y}_2)$, άρα, $[V]^{l+1} \cap [EV(\vec{y}_2)]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}$.

Ανάλογα, υπάρχει μια extraction $\vec{y} \prec \vec{y}_2$ της $\vec{y}_2$ και $1 \le j_0 \le s$ τέτοια ώστε

$$[C]^{l+1} \cap [E(\vec{y})]^{<\infty} \subseteq C_{j_0}.$$

Καθώς $\vec{y} \prec \vec{y}_2$ έχουμε ακόμα ότι $[V]^{l+1} \cap [EV(\vec{y})]^{<\infty} \subseteq A_{i_0}$ και έχουμε το συμπέρασμα. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.1, για το διαμεριστικό σύστημα του Παραδείγματος 5.1.4 (2), είναι οι αντίστοιχες πολυδιάστατες εκφράσεις των Θεωρημάτων 2.6.11 και 2.6.12 για πολλές μεταβλητές. Θα περιοριστούμε στη μεταθετική περίπτωση. Η απόδειξη των ακόλουθων αποτελεσμάτων μέσω του Θεωρήματος 5.2.1 είναι εντελώς ανάλογη αυτής των Θεωρημάτων 2.6.11 και 2.6.12 μέσω του Θεωρήματος 2.2.5.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω $(X,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r,l,m \in \mathbb{N}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε οι ακολουθίες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}, (k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες και έστω $(y_{s,n})_{n\in\mathbb{Z}^*} \subseteq X$ για κάθε $s \in \mathbb{Z}^*$. Τότε υπάρχει $1 \le i_0 \le r$ και ακολουθίες $(H_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}, (L_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, 1 \le i \le m$, όπου $H_n^i \subsetneq E_n$, $L_n^i \subsetneq E_n$ και $E_n < E_{n+1}$, $H_n^i < H_{n+1}^i$, $L_n^i < L_{n+1}^i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le m$ και μια ακολουθία $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\gamma_n = \sum_{t\in E_n\setminus\bigcup_{i=1}^m (H_n\cup L_n)} y_{w_t^n,t} \in$*

X, $w_t^n \in \{-k_t, \ldots, -1\}$ *αν* $t < 0$ *και* $w_t^n \in \{1, \ldots, k_t\}$ *αν* $t > 0$, *τέτοια ώστε για κάθε συναρτήσεις* $f_1, \ldots, f_m, h_1, \ldots, h_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με* $f_i(n) \leq k_n$ *και* $h_i(n) \leq k_{-n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$ *να έχουμε*

$$[FS((w_n)_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0},$$
$$\textit{όπου } w_n = \gamma_n + \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{t\in H_n^i} y_{f_i(n),t} + \sum_{i=1}^m \sum_{t\in L_n^i} y_{-h_i(n),t}.$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.4 είναι τα ακόλουθα πορίσματα, που είναι η πολυδιάστατη έκδοση των Πορισμάτων 2.6.6 και 2.6.7, που είναι ισχυροποιημένα αποτελέσματα τύπου van der Waerden-Hindman (βλέπε συμβολισμό πριν από Πόρισμα 2.6.6).

Πόρισμα 5.2.5. *Έστω* $(X, +)$ *μεταθετική ημιομάδα,* $m \in \mathbb{N}$ *και* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X$. *Αν* $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ *για* $l, r \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχουν* $1 \leq i_0 \leq r$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}]$, $(b_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (b_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ *και* $(c_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (c_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}]$ *τέτοια ώστε*

$$\big(FS\big[\big(a_n + \textstyle\sum_{p=1}^m (i_n^p b_n^p + j_n^p c_n^p)\big)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big)^l \subseteq A_{i_0}$$
$$\textit{για κάθε } i_n^p, j_n^p \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_n^p, j_n^p \leq n,\ 1 \leq p \leq m.$$

Πόρισμα 5.2.6. *Έστω* $(X, +)$ *μεταθετική ημιομάδα,* $X = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$ *και έστω* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X$, $m \in \mathbb{N}$. *Υπάρχει* $1 \leq i_0 \leq r$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $l \in \mathbb{N}$ *υπάρχουν* $a \in FS((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})$, $b_1, \ldots, b_m \in FS((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *και* $c_1, \ldots, c_m \in FS((x_{-n})_{n\in\mathbb{N}})$ *τέτοια ώστε*

$$\bigcup_{0\leq i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_m\leq l-1} \{a + \sum_{p=1}^m (i_p b_p + j_p c_p)\} \subseteq A_{i_0}.$$

Αντίστοιχα, άμμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.1, για το διαμεριστικό σύστημα του Παραδείγματος (1), όπου $I = \mathbb{N}$, είναι τα ακόλουθα αποτελέσματα (στην μη-μεταθετική περίπτωση, για λόγους απλότητας, περιοριζόμαστε στην περίπτωση $m = 1$).

Θεώρημα 5.2.7. *Έστω* $(X, +)$ *μη-μεταθετική ημιομάδα,* $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r, l \in \mathbb{N}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *αύξουσα ακολουθία και έστω* $(y_{s,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *για κάθε* $s \in \mathbb{N}$. *Τότε υπάρχει* $1 \leq i_0 \leq r$, *και ακολουθιες* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}, (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ *με:*

> $H_n = \cup_{i=1}^{m_n} H_i^n$, $B_n = \cup_{i=1}^{m_n+1} B_i^n$ *με* $H_1^n < \ldots < H_{m_n}^n$, $B_1^n < \ldots < B_{m_n+1}^n$ *και* $H_{m_n}^n < H_1^{n+1}$, $B_{m_n+1}^n < B_1^{n+1}$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

και υπάρχουν $\beta_i^n = \sum_{t\in B_i^n} y_{w_t^n,t} \in X$, $i = 1, \ldots, m_n + 1$ *με* $w_t^n \in \{1, \ldots, k_t\}$, *τέτοια ώστε για κάθε συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με* $f(n) \leq k_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *να έχουμε*

$$[FS((w_n)_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0},$$
$$\text{όπου } w_n = \textstyle\sum_{i=1}^{m_n}(\beta_i^n + \sum_{t\in H_i^n} y_{f(n),t}) + \beta_{m_n+1}^n.$$

Θεώρημα 5.2.8. *Έστω $(X,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r,l,m \in \mathbb{N}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ αύξουσα ακολουθία και έστω $(y_{s,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, ακολουθίες $(H_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, 1 \leq i \leq m$, όπου $H_n^i \subseteq E_n$ και $E_n < E_{n+1}$, $H_n^i < H_{n+1}^i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$ και ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\beta_n = \sum_{t\in E_n\setminus\bigcup_{i=1}^m H_n^i} y_{w_t^n,t} \in X$, $w_t^n \in \{1,\ldots,k_t\}$ τέτοια ώστε για κάθε συναρτήσεις $f_1,\ldots,f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f_i(n) \leq k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$, να έχουμε*

$$[FS((w_n)_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0},$$
$$\text{όπου } w_n = \beta_n + \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{t\in H_n^i} y_{f_i(n),t}.$$

Ανάλογα με τα Πορίσματα 5.2.5 και 5.2.6, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.8 έχουμε:

Πόρισμα 5.2.9. *Έστω $(X,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $m \in \mathbb{N}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Αν $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ για $l,r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ και $(b_n^1)_{n\in\mathbb{N}},\ldots,(b_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq FS[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ τέτοια ώστε*

$$\big(FS\big[(a_n + \textstyle\sum_{p=1}^m i_n^p b_n^p)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big)^l \subseteq A_{i_0}$$
$$\text{για κάθε } i_n^p \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_n^p \leq n,\ 1 \leq p \leq m.$$

Πόρισμα 5.2.10. *Έστω $(X,+)$ μεταθετική ημιομάδα, $X = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$ και έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοιο ώστε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $a \in FS((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ και $b_1,\ldots,b_m \in FS((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ τέτοια ώστε*

$$\bigcup_{0\leq i_1,\ldots,i_m\leq l-1} \{a + \sum_{p=1}^m i_p b_p\} \subseteq A_{i_0}.$$

5.3 Επεκτεταμένα διαμεριστικά τύπου Ramsey θεωρήματα για $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεις

Στο Θεώρημα 5.3.4 παρακάτω, θα αποδείξουμε ένα επεκτεταμένο, σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό, διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για το διαμεριστικό σύστημα $\big(L,V,C,P,(T_{(p_1,\ldots,p_m)})_{(p_1,\ldots,p_m)\in\mathbb{N}^m},\ (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ του Παραδείγματος 5.1.4 (1). Το Θεώρημα 5.1.5 αντιστοιχεί στην περίπτωση $\xi = 1$.

Όπως και στο Κεφάλαιο 1, ουσιώδη για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.4 είναι τα Schreier συστήματα $([C]^\xi)_{\xi<\omega_1}$ και $([V]^\xi)_{\xi<\omega_1}$ (Ορισμός 5.3.1), που αποτελούνται από οικογένειες από πεπερασμένες διατεταγμένες ακολουθίες (σταθερών και με μεταβλητή αντίστοιχα) $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεων.

Για μια located λέξη $w \in L$ θέτουμε $d(w) = |dom(w)|$ το μήκος της w. Θα ορίσουμε ακολούθως τα Schreier συστήματα $([C]^\xi)_{\xi<\omega_1}$ και $([V]^\xi)_{\xi<\omega_1}$.

Ορισμός 5.3.1 (Τα Schreier συστήματα $([C]^\xi)_{\xi<\omega_1}$ και $([V]^\xi)_{\xi<\omega_1}$). *Έστω το διαμεριστικό σύστημα $\big(L, V, C, P,\ (T_{(p_1,\dots,p_m)})_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathbb{N}^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ του Παραδείγματος 5.1.4 (1). Θέτουμε:*

$[C]^0 = \{\emptyset\} = [V]^0$, *και για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό* $\xi \geq 1$,

$[C]^\xi = \{(w_1,\dots,w_l) \in [C]^{<\infty} :\ l \in \mathbb{N},\ \{d(w_1),\dots,d(w_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$,

$[V]^\xi = \{(w_1,\dots,w_l) \in [V]^{<\infty} :\ l \in \mathbb{N},\ \{d(w_1),\dots,d(w_l)\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.

Παρατήρηση 5.3.2. *(i)* $[C]^\xi \subseteq [C]^{<\infty}$, $[V]^\xi \subseteq [V]^{<\infty}$ *και* $\emptyset \notin [C]^\xi \cup [V]^\xi$ *για κάθε* $\xi \geq 1$.

(ii) $[C]^l = \{(w_1,\dots,w_l) : w_1 <_{R_2} \dots <_{R_2} w_l \in C\}$,

$[V]^l = \{(w_1,\dots,w_l) : w_1 <_{R_2} \dots <_{R_2} w_l \in V\}$ *για* $l \in \mathbb{N}$.

(iii) $[C]^\omega = \{(w_1,\dots,w_n) \in [C]^{<\infty} : n \in \mathbb{N},$ *και* $d(w_1) = n\}$,

$[V]^\omega = \{(w_1,\dots,w_n) \in [V]^{<\infty} : n \in \mathbb{N},$ *και* $d(w_1) = n\}$.

Η ακόλουθη πρόταση δείχνει την αναδρομικότητα των συστημάτων $([C]^\xi)_{\xi<\omega_1}$ και $([V]^\xi)_{\xi<\omega_1}$.

Πρόταση 5.3.3. *Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό $\xi \geq 1$, υπάρχει συγκεκριμένη ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από αριθμήσιμους διατακτικούς με $\xi_n < \xi$ τέτοια ώστε για $s \in C$ και $t \in V$, με $d(s) = d(t) = n$, να έχουμε*

$$[C]^\xi(s) = [C]^{\xi_n} \cap ([C]^{<\infty} - s), \quad \textit{και} \quad [V]^\xi(t) = [V]^{\xi_n} \cap ([V]^{<\infty} - t).$$

Επιπλέον, $\xi_n = \zeta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $\xi = \zeta + 1$, και $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία με $\sup_n \xi_n = \xi$ αν ξ είναι οριακός διατακτικός.

Απόδειξη. Ανάλογη της Πρότασης 2.2.4. □

Για να ορίσουμε και να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα της ενότητας αυτής, ένα διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεις επεκτεταμένο σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο συμβολισμό:

Συμβολισμός

Για $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_l) \in [V]^{<\infty}$ και $t \in L$, θέτουμε:

$[E(\vec{x})]^{<\infty} = \{\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_l) \in [C]^{<\infty} :\ l \in \mathbb{N},\ y_1,\dots,y_l \in E(\vec{x})\} \cup \{\emptyset\}$,

$[EV(\vec{x})]^{<\infty} = \{\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_l) \in [V]^{<\infty} :\ l \in \mathbb{N},\ y_1,\dots,y_l \in EV(\vec{x})\} \cup \{\emptyset\}$,

και

$[EV(\mathbf{x})]^{<\infty} = \{\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_l) \in [V]^{<\infty} :\ l \in \mathbb{N},\ y_1,\dots,y_l \in EV(\mathbf{x})\} \cup \{\emptyset\}$.

Ακόμα, θέτουμε

$\vec{x} - t = (x_n)_{n \geq l} \in [V]^\infty$, όπου $l = \min\{n \in \mathbb{N} : t <_{R_2} x_n\}$, και
$\vec{x} - \mathbf{x} = \vec{x} - x_l$.

Θεώρημα 5.3.4 (Διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey σε οικογένειες Schreier για $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεις). *Έστω $\xi \geq 1$ αριθμήσιμος διατακτικός. Για κάθε $\mathcal{G} \subseteq [C]^{<\infty}$, $\mathcal{F} \subseteq [V]^{<\infty}$ και κάθε άπειρη διατεταγμένη ακολουθία $\vec{w} \in [V]^\infty$ από $(D_i)_{i\in I}$-located λέξεις με μεταβλητή υπάρχει μια extraction με μεταβλητή $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ τέτοια ώστε:*
είτε $[C]^\xi \cap [E(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{G}$, ή $[C]^\xi \cap [E(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq [C]^{<\infty} \setminus \mathcal{G}$, και
είτε $[V]^\xi \cap [EV(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$, ή $[V]^\xi \cap [EV(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

Για την απόδειξη του διαμεριστικού αυτού θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαγώνιο επιχείρημα, που περιέχεται στα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 5.3.5. *Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$, και*

$$\Pi = \{(t, \vec{s}) : \ t \in C, \ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty \ \text{ με } \ \vec{s} \prec \vec{w} \ \text{ και } \ t <_{R_2} s_1\}.$$

Αν ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του Π ικανοποιεί

(i) για κάθε $(t, \vec{s}) \in \Pi$, υπάρχει $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, και

(ii) για κάθε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ και $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, έχουμε $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$,

τότε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$, τέτοια ώστε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ για κάθε $t \in E(\vec{u})$ και $\vec{s} \prec \vec{u} - t$.

Απόδειξη. Έστω $u_0 = w_1 = w_{i_1} \dots w_{i_l}$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχει $\vec{s}_1 = (s_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{w} - u_0$ τέτοιο ώστε $(T_{(p_1,\dots,p_m)}(u_0), \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$ για κάθε $1 \leq p_r \leq k_{i_j}$ αν $w_{i_j} = v_r$ για $1 \leq r \leq m$. Έστω $u_1 = s_1^1$. Βέβαια, $u_0 <_{R_2} u_1$ και $u_0, u_1 \in EV(\vec{w})$. Η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί αναλόγως με την απόδειξη του Λήμματος 5.2.2. □

Λήμμα 5.3.6. *Έστω $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$, και*

$$\Pi = \{(t, \vec{s}) : \ t \in V, \ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty \ \text{ με } \ \vec{s} \prec \vec{w} \ \text{ και } \ t <_{R_2} s_1\}.$$

Αν ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του Π ικανοποιεί

(i) για κάθε $(t, \vec{s}) \in \Pi$, υπάρχει $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, και

(ii) για κάθε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ και $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$, έχουμε $(t, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$,

τότε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$, τέτοια ώστε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}$ για κάθε $t \in EV(\vec{u})$ και $\vec{s} \prec \vec{u} - t$.

Απόδειξη. Έστω $u_0 = w_1$. Σύμφωνα με τη συνθήκη (i), υπάρχει $\vec{s}_1 = (s_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ με $\vec{s}_1 \prec \vec{w} - u_0$ τέτοια ώστε $(u_0, \vec{s}_1) \in \mathcal{R}$. Έστω $u_1 = s_1^1$. Βέβαια, $u_0 <_{R_2} u_1$ και $u_0, u_1 \in EV(\vec{w})$. Η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί αναλόγως με την απόδειξη του Λήμματος 5.2.3. □

Θα αποδείξουμε τώρα το Θεώρημα 5.3.4.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.4. Έστω $\mathcal{G} \subseteq [C]^{<\infty}$, $\mathcal{F} \subseteq [V]^{<\infty}$ και $\vec{w} \in [V]^{\infty}$. Για $\xi = 1$ το συμπέρασμα ισχύει, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.5. Έστω $\xi > 1$. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε $\zeta < \xi$. Έστω $t \in V$ με $d(t) = n$ και $\vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^{\infty}$ με $\vec{s} \prec \vec{w}$ και $t <_{P_2} s_1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.3, υπάρχει $\xi_n < \xi$ τέτοιο ώστε

$$[V]^{\xi}(t) = [V]^{\xi_n} \cap ([V]^{<\infty} - t).$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $\vec{s}_1 \prec \vec{s}$ τέτοιο ώστε
είτε $[V]^{\xi_n} \cap [EV(\vec{s}_1)]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}(t)$,
ή $[V]^{\xi_n} \cap [EV(\vec{s}_1)]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}(t)$.
Τότε $\vec{s}_1 \prec \vec{s} \prec \vec{w}$, και
είτε $[V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{s}_1)]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}(t)$,
ή $[V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{s}_1)]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}(t)$.
Έστω

$$\mathcal{R}_1 = \{(t, \vec{s}) :\ t \in V,\ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^{\infty}, \vec{s} \prec \vec{w},\ t <_R s_1, \text{ και}$$
$$\text{είτε } [V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{s})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}(t) \text{ ή } [V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{s})]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}(t)\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{R}_1$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) (με βάση τα προηγούμενα επιχειρήματα) και (ii) (προφανώς) του Λήμματος 5.3.6. Συνεπώς, υπάρχει $\vec{w}_1 = (w_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}_1$ για κάθε $t \in EV(\vec{w}_1)$ και $\vec{s} \prec \vec{w}_1 - t$.

Αναλόγως, ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{R}_2 = \{(t, \vec{s}) :\ t \in V,\ \vec{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^{\infty}, \vec{s} \prec \vec{w}_1,\ t <_{R_2} s_1, \text{ και}$$
$$\text{είτε } [V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{s})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}(t) \text{ ή } [V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{s})]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}(t)\}.$$

Έχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{R}_2$ ικανοποιεί τις συνήκες του Λήμματος 5.3.5. Συνεπώς, υπάρχει $\vec{w}_2 = (w_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}_1$ τέτοια ώστε $(t, \vec{s}) \in \mathcal{R}_2$ για κάθε $t \in E(\vec{w}_2)$ και $\vec{s} \prec \vec{w}_2 - t$.
Έστω
$\mathcal{G}_1 = \{t \in E(\vec{w}_2) :\ [C]^{\xi}(t) \cap [E(\vec{w}_2 - t)]^{<\infty} \subseteq \mathcal{G}(t)\}$, και
$\mathcal{F}_1 = \{t \in EV(\vec{w}_2) :\ [V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{w}_2 - t)]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}(t)\}$.
Χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για $\xi = 1$ (Θεώρημα 5.1.5). Τότε, υπάρχει μια extraction με μεταβλητή $\vec{u} \prec \vec{w}_2$ της $\vec{w}_2$ τέτοια ώστε:
είτε $E(\vec{u}) \subseteq \mathcal{G}_1$, ή $E(\vec{u}) \subseteq C \setminus \mathcal{G}_1$, και,
είτε $EV(\vec{u}) \subseteq \mathcal{F}_1$, ή $EV(\vec{u}) \subseteq V \setminus \mathcal{F}_1$.
Καθώς $\vec{u} \prec \vec{w}_2$, έχουμε ότι $E(\vec{u}) \subseteq E(\vec{w}_2)$ και $EV(\vec{u}) \subseteq EV(\vec{w}_2)$. Συνεπώς
είτε $[C]^{\xi}(t) \cap [E(\vec{u} - t)]^{<\infty} \subseteq \mathcal{G}(t)$ για κάθε $t \in E(\vec{u})$,
ή $[C]^{\xi}(t) \cap [E(\vec{u} - t)]^{<\infty} \subseteq [C]^{<\infty} \setminus \mathcal{G}(t)$ για κάθε $t \in E(\vec{u})$, και,
είτε $[V]^{\xi}(t) \cap [EV(\vec{u} - t)]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}(t)$ για κάθε $t \in EV(\vec{u})$,

ή $[V]^\xi(t) \cap [EV(\vec{u}-t)]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}(t)$ για κάθε $t \in EV(\vec{u})$.

Συνεπώς,

είτε $[C]^\xi \cap [E(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{G}$, ή $[C]^\xi \cap [E(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq [C]^{<\infty} \setminus \mathcal{G}$, και,

είτε $[V]^\xi \cap [EV(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$, ή $[V]^\xi \cap [EV(\vec{u})]^{<\infty} \subseteq [V]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. □

5.4 Διαμεριστικά θεωρήματα για ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση

Από το Θεώρημα 5.2.1 μπορούμε να αποδείξουμε, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ένα ισχυρό l-διάστατο με πολλές μεταβλητές διαμεριστικό θεώρημα για ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i \in I}$.

Ορισμός 5.4.1. *([FeHS]) Μια* **ψηφιακή αναπαράσταση (digital representation)** *μιας ημιομάδας $(X,+)$ είναι μια οικογένεια $< D_i >_{i\in I}$, όπου I είναι ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο, κάθε D_i είναι μη-κενό υποσύνολο της X και κάθε στοιχείο της X έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $\sum_{i\in H} x_i$, όπου H είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I, κάθε $x_i \in D_i$ και τα αθροίσματα θεωρούνται με αύξουσα σειρά δεικτών. Αν X έχει ουδέτερο στοιχείο 0_X, τότε θέτουμε $0_X = \sum_{i\in\emptyset} x_i$.*

Παραδείγματα 5.4.2. *(4) Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Το $(\mathbb{N},+)$ είναι ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $D_n = \{d_n p^{n-1} : 1 \leq d_n \leq p-1\}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(5) Έστω $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς. Το $(\mathbb{Z},+)$ είναι ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$, όπου, $D_1 = \{1\}$ και για κάθε $n \geq 2$, $D_n = \{d_n(-1)^{n+1}(k_1+1)\cdots(k_{n-1}+1) : 1 \leq d_n \leq k_n\}$ (μια απόδειξη αυτού (που είναι στοιχειώδεις και αρκετά διασκεδαστική) βρίσκετε στο [BIP]).

(6) Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, το $(\mathbb{Q},+)$ είναι ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $D_n = \{d_n(-1)^n(n+1)! : 1 \leq d_n \leq n+1\}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}^-$, $D_n = \{d_n \frac{(-1)^{-n}}{(-n+1)!} : 1 \leq d_n \leq -n\}$.

(7) Έστω p πρώτος αριθμός και έστω $\mathbb{Z}(p^\infty)$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που γράφονται στη μορφή $\sum_{n\in\mathbb{N}} d_n p^{-n}$, όπου $0 \leq d_n \leq p-1$, $n \in \mathbb{N}$ και $d_n = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα n. Το ζεύγος $(\mathbb{Z}(p^\infty),+)$ είναι μια (ημι-)ομάδα (η πράξη + είναι πρόσθεση modulo1) με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $D_n = \{d_n p^{-n} : 1 \leq d_n \leq p-1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $(X,+)$ άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$. Θέτουμε

$$S = S((D_i)_{i\in I}) = \{x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_l} : l \in \mathbb{N}, i_1 < \ldots < i_l \in I \text{ και } x_{i_j} \in D_{i_j} \text{ για κάθε } 1 \leq j \leq l\}.$$

Αν η X έχει ουδέτερο στοιχείο 0_X, τότε $X = S \cup \{0_X\}$, αλλιώς $X = S$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.1.4 (1) για $m \in \mathbb{N}$ και μια αύξουσα ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}^m$, ορίζεται το διαμεριστικό σύστημα $\big(L, V, C, R, (T_{(p_1,\dots,p_m)})_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathbb{N}^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, όπου $V = L((D_i)_{i\in I}; \upsilon_1, \dots, \upsilon_m)$ για $\upsilon_1, \dots, \upsilon_m \notin D_i$ για κάθε $i \in I$, $C = L((D_i)_{i\in I})$ και $L = V \cup C$. Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των C και S μέσω της απεικόνισης

$$g : C \to S \text{ με } g(w_{i_1} \dots w_{i_l}) = w_{i_1} + \dots + w_{i_l}.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.2.1 στο διαμεριστικό σύστημα $\big(L, V, C, R, (T_{(p_1,\dots,p_m)})_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathbb{N}^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, μπορούμε να πάρουμε, μέσω της συνάρτησης g ένα ισχυροποιημένο πολυδιάστατο θεώρημα τύπου van der Waerden για τη $(X, +)$.

Για $x_1, x_2 \in S$ θέτουμε $x_1 <_{R_2} x_2 \iff g^{-1}(x_1) <_{R_2} g^{-1}(x_2)$.
Έστω
$[S]^{<\infty} = \{(x_1, \dots, x_n) : n \in \mathbb{N},\ x_1 <_{R_2} \dots <_{R_2} x_n \in S\} \cup \{\emptyset\}$,
$[S]^0 = \emptyset$, και για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό $\xi \geq 1$,
$[S]^\xi = \{(x_1, \dots, x_n) \in [S]^{<\infty} :\ n \in \mathbb{N},\ \{d(g^{-1}(x_1)), \dots, d(g^{-1}(x_n))\} \in \mathcal{A}_\xi\}$.
Έτσι, έχουμε
$[S]^l = \{(x_1, \dots, x_l) :\ x_1 <_{R_2} \dots <_{R_2} x_l \in S\}$ για $l \in \mathbb{N}$, και
$[S]^\omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in [S]^{<\infty} :\ n \in \mathbb{N}$, και $d(g^{-1}(x_1)) = n\}$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.4, παίρνουμε το ακόλουθο επεκτεταμένο σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό διαμεριστικό θεώρημα τύπου Ramsey για μια άπειρη ημιομάδα $(X, +)$ με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$.

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω $\xi \geq 1$ ένας αριθμήσιμος διατακτικός και $(X, +)$ μια άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$. Για κάθε οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq [S]^{<\infty}$ και κάθε ακολουθία $\vec{w} \in [V]^\infty$ υπάρχει $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ τέτοια ώστε*

$$\text{είτε} \quad [S]^\xi \cap [E((g(u_n))_{n\in\mathbb{N}})]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{ή}$$
$$[S]^\xi \cap [E((g(u_n))_{n\in\mathbb{N}})]^{\infty} \subseteq [S]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}.$$

Η ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5.4.3 για $\xi = \omega$ είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω $(X, +)$ άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$ και $\vec{w} \in [V]^\infty$. Αν $[S]^{<\infty} = A_1 \cup \dots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ και $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοια ώστε*

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in [S]^{<\infty} :\ n \in \mathbb{N},\ d(g^{-1}(x_1)) = n \text{ και}$$
$$x_1, \dots, x_n \in E((g(u_n))_{n\in\mathbb{N}})\} \subseteq A_{i_0}.$$

Η ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5.4.3 για ξ πεπερασμένο διατακτικό είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 5.4.5. *Έστω $(X,+)$ άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$, $l \in \mathbb{N}$ και $\vec{w} \in [V]^\infty$. Αν $[S]^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ και $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοια ώστε*

$$\{(x_1, \ldots, x_l) \in [S]^l : \ x_1, \ldots, x_l \in E((g(u_n))_{n\in\mathbb{N}})\} \subseteq A_{i_0}.$$

Στην περίπτωση που η $(X,+)$ είναι άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{Z}}$, χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 5.1.4 (2), το Θεώρημα 5.2.1 (για $I = \mathbb{Z}$) μας δίνει (εντελώς ανάλογα) για το διαμεριστικό σύστημα $\big(X, V_0, C, R_1, (T_{((p_1,q_1),\ldots,(p_m,q_m))})_{((p_1,q_1),\ldots,(p_m,q_m))\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, όπου $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη-κενά πεπερασμένα υποσύνολα του $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^m$, ένα πιο πολύπλοκο διαμεριστικό θεώρημα, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στις εφαρμογές μας παρακάτω.

Χρησιμοποιώντας το ανάλογο του Θεωρήματος 5.4.5 για $I = \mathbb{Z}$ (και $m = 1$ για λόγους απλότητας), θα αποδείξουμε ένα ισχυροποιημένο πολυδιάστατο τύπου van der Waerden θεώρημα για μη-μεταθετικές άπειρες ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{Z}}$ (βλέπε Συμβολισμό 2.6.1).

Θεώρημα 5.4.6. *Έστω $(X,+)$ μια μη-μεταθετική άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου, για $n \geq 0$, $D_n = \{y_{1,n}, \ldots, y_{k_n,n}\}$ και $D_n = \{y_{-k_n,n}, \ldots, y_{-1,n}\}$ για $n < 0$, με $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N}$ και $l \in \mathbb{N}$. Αν $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, για $r \in \mathbb{N}$, τότε, υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, ακολουθίες $(m_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (m_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}, (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, τέτοιες ώστε*

> *$E_n = \cup_{i=1}^{m_n^1+1} E_i^n$, $L_n = \cup_{i=1}^{m_n^1} L_i^n$, $H_n = \cup_{i=1}^{m_n^2} H_i^n$, $B_n = \cup_{i=1}^{m_n^2+1} B_i^n$ με $E^n_{m_n^1+1} < \ldots < E_1^n$, $L^n_{m_n^1} < \ldots < L_1^n$, $H_1^n < \ldots < H^n_{m_n^2}$, $B_1^n < \ldots < B^n_{m_n^2+1}$ και $H^n_{m_n^2} < H_1^{n+1}$, $B^n_{m_n^2+1} < B_1^{n+1}$, $L_1^n < L^{n+1}_{m^1_{n+1}}$, $E_1^n < E^{n+1}_{m^1_{n+1}+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

και υπάρχουν $\gamma_i^n = \sum_{t\in E_i^n} x_t^n$, $i = 1, \ldots, m_n^1 + 1$ και $\delta_i^n = \sum_{t\in B_i^n} x_t^n$, $i = 1, \ldots, m_n^2 + 1$ με $x_t^n \in D_t$, τέτοια ώστε για κάθε συναρτήσεις $f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(n) \leq \alpha_n$ και $h(n) \leq \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να έχουμε

$$[FS((w_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0}, \text{ όπου}$$
$$w_n = \gamma_1^n + \sum_{i=1}^{m_n^1}\big(\sum_{t\in L_i^n} y_{-h(n),t} + \gamma_{i+1}^n\big) \text{ και}$$
$$z_n = \sum_{i=1}^{m_n^2}\big(\delta_i^n + \sum_{t\in H_i^n} y_{f(n),t}\big) + \delta^n_{m_n^2+1}$$

(οι όροι γ_i^n ή δ_i^n της μορφής $\sum_{t\in\emptyset} x_t^n$ διαγράφονται).

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4.5 (για $F_n = (\cup_{j\leq n}\{1,\ldots,k_j\}) \times (\cup_{j\leq n}\{1,\ldots,k_{-j}\}) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$) υπάρχει ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [L((D_n)_{n\in\mathbb{Z}}; \upsilon)]^\infty$ και $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοια ώστε $\big[\{g(T_{(p_1,q_1)}(s_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(s_{n_\lambda})) : \lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$ και $p_i \in \cup_{j\leq n_i}\{1,\ldots,k_j\}$, $q_i \in \cup_{j\leq n_i}\{1,\ldots,k_{-j}\}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda\}\big]^l \subseteq A_{i_0}$.

Για $n \in \mathbb{N}$ έστω $x_n = x^n_{q^n_1} + \ldots + x^n_{q^n_{l_n}} = g(s_n)$.

Θέτουμε $I^-_n = \{i^n_1 < \ldots < i^n_{\mu(n)} : x^n_{q^n_{i^n_j}} = \upsilon,\ q^n_{i^n_j} < 0,\ 1 \leq j \leq \mu(n),\ i^n_j \in \{1,\ldots,l_n\}\}$, και
$I^+_n = \{i^n_{\mu(n)+1} < \ldots < i^n_{\nu(n)} : x^n_{q^n_{i^n_j}} = \upsilon,\ q^n_{i^n_j} > 0,\ \mu(n)+1 \leq j \leq \nu(n),\ i^n_j \in \{1,\ldots,l_n\}\}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν m^1_n, $m^2_n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\cup_{i=1}^{m^1_n} L^n_i = \{x^n_{q^n_i} = \upsilon : i \in I^-_n\}$ και $\cup_{i=1}^{m^2_n} H^n_i = \{x^n_{q^n_i} = \upsilon : i \in I^+_n\}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E^n_1 = \{q^n_j < q^n_{i^n_1} : x^n_{q^n_j} \neq \upsilon,\ 1 \leq j \leq l_n\}$, για $2 \leq i \leq m^1_n$ θέτουμε $E^n_i = \{\max L^n_{i-1} < q^n_j < \min L^n_i : x^n_{q^n_j} \neq \upsilon,\ 1 \leq j \leq l_n\}$ και $E^n_{m^1_n+1} = \{q^n_j > q^n_{i^n_{\mu(n)}} : q^n_j < 0,\ x^n_{q^n_j} \neq \upsilon,\ 1 \leq j \leq l_n\}$, $B^n_1 = \{q^n_j < q^n_{i^n_{\mu(n)+1}} : q^n_j > 0,\ x^n_{q^n_j} \neq \upsilon,\ 1 \leq j \leq l_n\}$, για $2 \leq i \leq m^2_n$ θέτουμε $B^n_i = \{\max H^n_i < q^n_j < \min H^n_{i+1} : x^n_{q^n_j} \neq \upsilon,\ 1 \leq j \leq l_n\}$ και $B^n_{m^2_n+1} = \{q^n_j > q^n_{i^n_{\nu(n)}} : x^n_{q^n_j} \neq \upsilon,\ 1 \leq j \leq l_n\}$.

Ορίζουμε $\alpha_n = \min\{k_n,\ k_{q^n_j} : j \in I^+_n\} \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \min\{k_{-n},\ k_{q^n_j} : j \in I^-_n\} \in \mathbb{N}$ και $\gamma^n_i = \sum_{t\in E^n_i} x^n_t$ για $1 \leq i \leq m^1_n + 1$, $\delta^n_i = \sum_{t\in B^n_i} x^n_t$ για $1 \leq i \leq m^2_n + 1$.

Έστω $f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ συναρτήσεις με $f(n) \leq \alpha_n$ και $h(n) \leq \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $w_n = \gamma^n_1 + \sum_{i=1}^{m^1_n}(\sum_{t\in L^n_i} y_{-h(n),t} + \gamma^n_{i+1})$ και $z_n = \sum_{i=1}^{m^2_n}(\delta^n_i + \sum_{t\in H^n_i} y_{f(n),t}) + \delta^n_{m^2_n+1}$, τότε για $\lambda \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_\lambda \in \mathbb{N}$, με $f(n_i) = p_i$, $h(n_i) = q_i$, $1 \leq p_i \leq \alpha_{n_i}$, $1 \leq q_i \leq \beta_{n_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq \lambda$, έχουμε
$w_{n_\lambda} + \ldots + w_{n_1} + z_{n_1} + \ldots + z_{n_\lambda} = g(T_{(p_1,q_1)}(s_{n_1}) \star \ldots \star T_{(p_\lambda,q_\lambda)}(s_{n_\lambda})) \in A_{i_0}$. □

Παρατήρηση 5.4.7. *Στην περίπτωση που οι $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(k_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, έχουμε $\alpha_n = k_n$ και $\beta_n = k_{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Η μεταθετική περίπτωση με πολλές μεταβλητές του Θεωρήματος 5.4.6 είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 5.4.8. *Έστω $(X, +)$ μεταθετική άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $D_n = \{y_{1,n}, \ldots, y_{k_n,n}\}$ για $n \geq 0$ και $D_n = \{y_{-k_n,n}, \ldots, y_{-1,n}\}$ για $n < 0$ με $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N}$ και $l, m \in \mathbb{N}$. Αν $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $1 \leq i_0 \leq r$, ακολουθίες $(\alpha^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(H^i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$, $(L^i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{Z}^-]^{<\omega}_{>0}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, 1 \leq i \leq m$, όπου $H^i_n \subsetneq$*

$E_n,\ L_n^i \subsetneq E_n$ *και* $E_n < E_{n+1},\ H_n^i < H_{n+1}^i,\ L_n^i < L_{n+1}^i$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$ *και ακολουθία* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $\gamma_n = \sum_{t\in E_n \setminus \bigcup_{i=1}^m (H_n^i \cup L_n^i)} x_t^n,\ x_t^n \in D_t$ *τέτοια ώστε για κάθε συναρτήσεις* $f_1,\ldots,f_m,h_1,\ldots,h_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με* $f_i(n) \leq \alpha_n^i$ *και* $h_i(n) \leq \beta_n^i$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$ *να έχουμε*

$$[FS((\gamma_n + \sum_{i=1}^m \sum_{t\in H_n^i} y_{f_i(n),t} + \sum_{i=1}^m \sum_{t\in L_n^i} y_{-h_i(n),t})_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0}$$

(οι όροι $\gamma_n = \sum_{t\in\emptyset} x_t^n$ *διαγράφονται).*

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.4.5 για $I = \mathbb{N}$ (και $m = 1$), ανάλογα με το Θεώρημα 5.4.6, έχουμε ένα πολυδιάστατο θεώρημα τύπου van der Waerden για μη-μεταθετικές άπειρες ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$.

Θεώρημα 5.4.9. *Έστω* $(X,+)$ *μη-μεταθετική άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση* $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$, *όπου* $D_n = \{y_{1,n},\ldots,y_{k_n,n}\}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *και* $l \in \mathbb{N}$. *Αν* $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r,\ r \in \mathbb{N}$ *τότε υπάρχουν* $1 \leq i_0 \leq r$, *ακολουθίες* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N},\ (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega},\ (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ *με:*

> $H_n = \cup_{i=1}^{m_n} H_i^n,\ B_n = \cup_{i=1}^{m_n+1} B_i^n$ *με* $H_1^n < \ldots < H_{m_n}^n,\ B_1^n < \ldots < B_{m_n+1}^n$ *και* $H_{m_n}^n < H_1^{n+1},\ B_{m_n+1}^n < B_1^{n+1}$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

και υπάρχουν $\beta_i^n = \sum_{t\in B_i^n} x_t^n,\ i = 1,\ldots,m_n+1$ *με* $x_t^n \in D_t$, *τέτοια ώστε για κάθε συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με* $f(n) \leq \alpha_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *να έχουμε*

$$[FS((\sum_{i=1}^{m_n}(\beta_i^n + \sum_{t\in H_i^n} y_{f(n),t}) + \beta_{m_n+1}^n)_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0}$$

(οι όροι $\beta_n = \sum_{t\in\emptyset} x_t^n$ *διαγράφονται).*

Η μεταθετική έκδοση με πολλές μεταβλητές του Θεωρήματος 5.4.9 είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 5.4.10. *Έστω* $(X,+)$ *μεταθετική άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση* $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$, *όπου* $D_n = \{y_{1,n},\ldots,y_{k_n,n}\}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *και* $l,m \in \mathbb{N}$. *Αν* $X^l = A_1 \cup \ldots \cup A_r,\ r \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχουν* $1 \leq i_0 \leq r$, *ακολουθίες* $(\alpha_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N},\ (H_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0},\ (E_n)_{n\in\mathbb{N}}, 1 \leq i \leq m$, *όπου* $H_n^i \subseteq E_n$ *και* $E_n < E_{n+1},\ H_n^i < H_{n+1}^i$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$ *και ακολουθία* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $\beta_n = \sum_{t\in E_n \setminus \bigcup_{i=1}^m H_n^i} x_t^n,\ x_t^n \in D_t$ *τέτοια ώστε για κάθε συναρτήσεις* $f_1,\ldots,f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με* $f_i(n) \leq \alpha_n^i$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$, *να έχουμε*

$$[FS((\beta_n + \sum_{i=1}^m \sum_{t\in H_n^i} y_{f_i(n),t})_{n\in\mathbb{N}})]^l \subseteq A_{i_0}$$

(οι όροι $\beta_n = \sum_{t\in\emptyset} x_t^n$ *διαγράφονται).*

5.5 Εφαρμογές του διαμεριστικού θεωρήματος στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Έστω $(L, V, C, R, (T_{(p_1,\dots,p_m)})_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathbb{N}^m}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}})$ το διαμεριστικό σύστημα του Παραδείγματος 5.1.4 (1), όπου $(I,<)$ γραμμικά διατεταγμένο σύνολο με την επιπλέον συνθήκη ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει $j \in I$ με $i < j$. Παρατηρούμε τότε ότι το C μπορεί να θεωρηθεί τότε ως κατευθυνόμενο σύνολο με τη μερική διάταξη R_2. Έτσι, σε ένα τοπολογικό χώρο X, μπορούμε να θεωρούμε το $\{x_w\}_{w\in C} \subseteq X$ ως ένα R_2-δίκτυο στο X. Επιπλέον, το $\{x_w\}_{w\in E(\vec{u})}$ για $\vec{u} \in [V]^\infty$ είναι ένα R_2-υποδίκτυο του $\{x_w\}_{w\in C}$.
Έστω $x_0 \in X$. Γάφουμε

$$R_2\text{-}\lim_{w\in C} x_w = x_0$$

αν το $\{x_w\}_{w\in C}$ συγκλίνει στο x_0 ως R_2-δίκτυο του X, δηλαδή αν για κάθε περιοχή V του x_0, υπάρχει $i_0 \equiv i_0(V) \in I$ τέτοιο ώστε $x_w \in V$ για κάθε w με $\min dom(w) \geq i_0$.

Δίνουμε μια τοπολογική επαναδιατύπωση του Θεωρήματος 5.1.5.

Θεώρημα 5.5.1. *Έστω (X,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$. Για κάθε δίκτυο $\{x_w\}_{w\in C} \subseteq X$, υπάρχουν μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε*

$$R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = x_0.$$

Απόδειξη. Για $x \in X$ και $\epsilon > 0$ θέτουμε $\widehat{B}(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \epsilon\}$. Καθώς ο (X,d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, έχουμε ότι $X = \bigcup_{i=1}^{m_1} \widehat{B}(x_i^1, \frac{1}{2})$ για κάποια $x_1^1, \dots, x_{m_1}^1 \in X$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.5, υπάρχουν $\vec{u}_1 \prec \vec{w}$ και $1 \leq i_1 \leq m_1$ τέτοια ώστε $\{x_w\}_{w\in E(\vec{u}_1)} \subseteq \widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$. Ανάλογα, καθώς $\widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1^2, \dots, x_{m_2}^2 \in X$, τέτοια ώστε $\widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_2} \widehat{B}(x_i^2, \frac{1}{4})$, και συνεπώς υπάρχουν $\vec{u}_2 \prec \vec{u}_1$ και $1 \leq i_2 \leq m_2$ τέτοια ώστε $\{x_w\}_{w\in E(\vec{u}_2)} \subseteq \widehat{B}(x_{i_1}^1, \frac{1}{2}) \cap \widehat{B}(x_{i_2}^2, \frac{1}{4})$. Επαγωγικά, κατασκευάζουμε $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [V]^\infty$ τέτοια ώστε $\vec{u}_{n+1} \prec \vec{u}_n \prec \vec{w}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κλειστές μπάλες $\widehat{B}(x_{i_n}^n, \frac{1}{2^n})$, για $n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\{x_w\}_{w\in E(\vec{u}_n)} \subseteq \textstyle\bigcap_{j=1}^n \widehat{B}(x_{i_j}^j, \frac{1}{2^j}).$$

Αν $\vec{u}_n = (w_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θέτουμε $\vec{u} = (w_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Βέβαια $\vec{u} \prec \vec{w}$. Έστω $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widehat{B}(x_{i_n}^n, \frac{1}{2^n})$. Τότε $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = x_0$. Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/2^{k_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $w \in E(\vec{u}_{k_0})$ έχουμε ότι $d(x_w, x_0) \leq 1/2^{k_0} < \varepsilon$. Καθώς $E(\vec{u}_n) \subseteq E(\vec{u}_{k_0})$ για κάθε $n \geq k_0$, έχουμε ότι $E((w_n^{(n)})_{n\geq k_0}) \subseteq E(\vec{u}_{k_0})$ και συνεπώς ότι $\{w \in E(\vec{u}) : \min dom(w) \geq i_0\} \subseteq E(\vec{u}_{k_0})$ για $i_0 = \max dom(w_{k_0}^{(k_0)})$. $\square$

Παρατήρηση 5.5.2. *(1) Δείξαμε ότι το Θεώρημα 5.5.1 έπεται από το Θεώρημα 5.1.5. Το αντίστροφο είναι σωστό επίσης. Πράγματι, έστω $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, $s \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζοντας, για κάθε $w \in C$, $x_w = i$ αν και μόνο αν $w \in C_i$ και $w \notin C_j$ για κάθε $j < i$, έχουμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.1, ότι υπάρχει $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \vec{w}$ και $1 \leq j_0 \leq s$ τέτοια ώστε $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = j_0$. Για n_0 αρκετά μεγάλο και $\vec{u}_0 = (u_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $E(\vec{u}_0) \subseteq C_{j_0}$.*

(2) Παρατηρούμε ότι αν $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} x_w = x_0$ για $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$, τότε οι ακολουθίες $(x_{u_n(p_1^n,\ldots,p_m^n)})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο x_0 για κάθε ακολουθία $((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^m$ με $(p_1^n,\ldots,p_m^n) \in F_n$.

(3) Παρατηρούμε ότι για $I = \mathbb{N}$ (Παράδειγμα 5.1.4 (1)) και $I = \mathbb{Z}$ (Παράδειγμα 5.1.4 (2)) έχουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 μέσω του Θεωρήματος 5.5.1.

Στην ακόλουθη πρόταση θα χαρακτηρίσουμε την R_2-σύγκλιση των δικτύων $\{x_w\}_{w\in C}$ ως ομοιόμορφη IP-σύγκλιση, ανοίγοντας έτσι τον δρόμο για ισχυροποιημένα αποτελέσματα ως προς την IP-σύγκλιση.

Πρόταση 5.5.3. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ και $\{x_w\}_{w\in C} \subseteq X$. Για μια ακολουθία $((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^m$ με $(p_1^n,\ldots,p_m^n) \in F_n$ και $F = \{n_1 < \ldots < n_\lambda\} \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ θέτουμε*
$$y_F^{((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}}} = x_{w_{n_1}(p_1^{n_1},\ldots,p_m^{n_1})\star\ldots\star w_{n_\lambda}(p_1^{n_\lambda},\ldots,p_m^{n_\lambda})}.$$

Αν $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{w})} x_w = x_0$ τότε $IP\text{-}\lim_{F\in[\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}} y_F^{((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}}} = x_0$ ομοιόμορφα για κάθε ακολουθία $((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^m$ με $(p_1^n,\ldots,p_m^n) \in F_n$.

Απόδειξη. Έστω U μια περιοχή του x_0. Υπάρχει $i_0 \equiv i_0(U) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_w \in U$ για κάθε $w \in E(\vec{w})$ με $\min dom(w) \geq i_0$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\min dom(w_{n_0}) \geq i_0$. Τότε, για $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}_{>0}$ με $n_0 < \min F$ έχουμε ότι $y_F^{((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}}} \in U$ για κάθε ακολουθία $((p_1^n,\ldots,p_m^n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^m$ με $(p_1^n,\ldots,p_m^n) \in F_n$. □

Θα δώσουμε τώρα μερικές εφαρμογές του Θεωρήματος 5.5.1 στα τοπολογικά δυναμικά συστήματα επεκτείνοντας θεμελιώδη αποτελέσματα επανεμφάνισης των Birkhoff ([Bi]) και Furstenberg-Weiss ([FuW], [Fu]). Αρχικά, θα δώσουμε την έννοια του C-συστήματος από συνεχείς απεικονίσεις από ένα τοπολογικό χώρο στον εαυτό του.

Ορισμός 5.5.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Μια οικογένεια $\{T^w\}_{w\in C}$ από συνεχείς απεικονίσεις από το X στον εαυτό του είναι ένα* **C-σύστημα** *του X αν $T^{w_1}T^{w_2} = T^{w_1\star w_2}$ για $w_1 <_{R_2} w_2$.*

Παράδειγμα 5.5.5. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.*

Έστω $T : X \to X$ συνεχής απεικόνιση. Για $(D_i)_{i\in I} \subseteq [\mathbb{N}]^{\leq\omega}_{>0}$ και $(l_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε για κάθε $w = w_{i_1}\dots w_{i_\lambda} \in C$

$$T^w = T^{l_{i_1}w_{i_1}+\dots+l_{i_\lambda}w_{i_\lambda}}.$$

Τότε το $\{T^w\}_{w\in C}$ είναι ένα C-σύστημα του X.
Επιπλέον, για μια οικογένεια $\{T_i\}_{i\in I}$ συνεχών απεικονίσεων από το X στον εαυτό του, ορίζοντας

$$T^w = T_{i_1}^{l_{i_1}w_{i_1}}\dots T_{i_\lambda}^{l_{i_\lambda}w_{i_\lambda}}.$$

έχουμε ένα ακόμα C-σύστημα του X.

Μέσω του Θεωρήματος 5.5.1, θα αποδείξουμε την ύπαρξη ισχυρά recurrent στοιχείων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X για ένα C-σύστημα αυτού. Επιπλέον, θα δείξουμε μια μέθοδο για να βρίσκουμε τέτοια σημεία (δες ανάλογα Κεφάλαιο 3, Παράγραφος 1).

Θεώρημα 5.5.6. *Έστω $\{T^w\}_{w\in C}$ ένα C-σύστημα από συνεχείς απεικονίσεις ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d), $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [V]^\infty$ και $x \in X$. Τότε υπάρχουν μια extraction $\vec{u} \prec \vec{w}$ της $\vec{w}$ και $x_0 \in X$ τέτοιες ώστε*

$$R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x) = x_0.$$

*Επιπλέον, το x_0 είναι ένα $\vec{w}$-**recurrent στοιχείο**, με την έννοια ότι*

$$R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x_0) = x_0.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.1 υπάρχουν μια extraction $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\vec{w}$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x) = x_0$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $d(T^w(x), x_0) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $w \in E(\vec{u})$ με $\min dom(w) \geq i_0$. Έστω $w \in E(\vec{u})$ με $\min dom(w) \geq i_0$. Τότε $d(T^w(x), x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Καθώς T^w είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(z, x_0) < \delta$, τότε $d(T^w(z), T^w(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}$. Επιλέγουμε $w_1 \in E(\vec{u})$ τέτοια ώστε $d(T^{w_1}(x), x_0) < \delta$ και $w <_{R_2} w_1$. Τότε $d(T^w(T^{w_1}(x)), T^w(x_0)) = d(T^{w\star w_1}(x), T^w(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}$. Καθώς $d(T^{w\star w_1}(x), x_0) < \frac{\epsilon}{2}$ έχουμε ότι $d(T^w(x_0), x_0) < \epsilon$. □

Θα ορίσουμε τώρα τα ισχυρά recurrent υποσύνολα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X για ένα C-σύστημα αυτού.

Ορισμός 5.5.7. *Έστω $\{T^w\}_{w\in C}$ ένα C-σύστημα από συνεχείς απεικονίσεις ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d) και $\vec{w} \in [V]^\infty$. Ένα κλειστό υποσύνολο A του X καλείται $\vec{w}$-**recurrent σύνολο** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $i \in I$, $\varepsilon > 0$ και κάθε στοιχείο $x \in A$ υπάρχουν $y \in A$ και $u \in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u) > i$ τέτοια ώστε $d(T^{u(p_1,\dots,p_m)}(y), x) < \varepsilon$ για κάθε $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq k$.*

Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα τρόπο εύρεσης ισχυρά recurrent υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X για ένα C-σύστημα αυτού.

Παράδειγμα 5.5.8. *Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $\Phi(X)$ το σύνολο των μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X εφοδιασμένο με την Hausdorff μετρική $\hat{d}$ (δες Παράδειγμα 3.1.11). Τότε $(\Phi(X),\hat{d})$ είναι επίσης συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω $\{T^w\}_{w\in C}$ ένα C-σύστημα από συνεχείς απεικονίσεις του (X,d). Ορίζουμε $\hat{T}^w:\Phi(X)\to\Phi(X)$ με $\hat{T}^w(A)=T^w(A)$. Τότε το $\{\hat{T}^w\}_{w\in C}$ είναι ένα C-σύστημα του $(\Phi(X),\hat{d})$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.6, για κάθε $\vec{w}=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[V]^\infty$ υπάρχουν $A\in\Phi(X)$ και μια extraction $\vec{u}\prec\vec{w}$ της $\vec{w}$ τέτοια ώστε*

$$R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})}\hat{T}^w(A)=A.$$

Τότε το A είναι $\vec{w}$-recurrent στο (X,d). Παρατηρούμε ότι αρκεί να ισχύει $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})}\hat{T}^w(A)\supseteq A$ ώστε το A να είναι $\vec{w}$-recurrent.

Πρόταση 5.5.9. *Έστω A ένα $\vec{w}$-recurrent υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d). Τότε για κάθε $\varepsilon>0$, $i\in I$ και $k\in\mathbb{N}$ υπάρχουν $u\in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u)>i$ και $z\in A$ τέτοια ώστε*

$$d(T^{u(p_1,\dots,p_m)}(z),z)<\varepsilon \text{ για κάθε } 1\le p_1,\dots,p_m\le k.$$

Απόδειξη. Έσω $\varepsilon>0$, $i\in I$ και $k\in\mathbb{N}$. Για $z_0\in A$ και $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ υπάρχουν $z_1\in A$ και $u_1\in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u_1)>i$ τέτοια ώστε $d(T^{u_1(p_1,\dots,p_m)}z_1,z_0)<\varepsilon$ για κάθε $1\le p_1,\dots,p_m\le k$.

Έστω ότι έχουμε επιλέξει $z_0,z_1,\dots,z_r\in A$, $u_1<_{R_2}\dots<_{R_2}u_r\in EV(\vec{w})$ τέτοια ώστε $d(T^{u_i(p_1^i,\dots,p_m^i)\star\dots\star u_j(p_1^j,\dots,p_m^j)}(z_j),z_{i-1})<\varepsilon/2$ για κάθε $1\le i\le j\le r$ και $1\le p_1^l,\dots,p_m^l\le k$, για κάθε $i\le l\le j$.

Η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί ανάλογα με την απόδειξη της Πρότασης 3.1.12. □

Στην ακόλουθη πρόταση δείνουμε μια ικανή συνθήκη ώστε ένα ομογενές υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (δες Ορισμό 3.1.13) να είναι ισχυρά recurrent.

Πρόταση 5.5.10. *Έστω A ένα ομογενές σύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X ως προς το σύστημα $\{T^w\}_{w\in C}$ και $\vec{w}\in[V]^\infty$. Αν για κάθε $\varepsilon>0$, $i\in I$ και $k\in\mathbb{N}$ υπάρχουν $x,y\in A$ και $u\in EV(\vec{w})$ με $\min dom(u)>i$ τέτοια ώστε $d(T^{u(p_1,\dots,p_m)}(y),x)<\varepsilon$ για κάθε $1\le p_1,\dots,p_m\le k$, τότε το A είναι $\vec{w}$-recurrent.*

Απόδειξη. Ανάλογη της Πρότασης 3.1.14 □

Θα αποδείξουμε ότι τα ισχυρά recurrent ομογενή υποσύνολα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X περιέχουν ισχυρά recurrent στοιχεία και ότι αυτά αποτελούν πυκνό υποσύνολο.

Πρόταση 5.5.11. *Έστω $\{T^w\}_{w\in C}$ ένα C-σύστημα από συνεχείς απεικονίσεις ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X,d) και $\vec{w}\in[V]^\infty$. Ένα $\vec{w}$-recurrent ομογενές υποσύνολο A του X περιέχει $\vec{w}$-recurrent στοιχεία (το x_0 είναι $\vec{w}$-* **recurrent** *αν και μόνο αν $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T^w(x_0)=x_0$).*

Επιπλέον, τα $\vec{w}$-recurrent στοιχεία του A αποτελούν πυκνό υποσύνολο του A.

Απόδειξη. Ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 3.1.15. □

Θα αποδείξουμε τώρα ένα θεώρημα πολλαπλής επανεμφάνισης, επεκτείνοντας το Θεώρημα 5.5.6, στην περίπτωση που οι μετασχηματισμοί είναι ομοιομορφισμοί, αποτέλεσμα ανάλογο του θεωρήματος πολλαπλής επανεμφάνισης του Birkhoff.

Θεώρημα 5.5.12. *Έστω $\{T_1^w\}_{w\in C},\dots,\{T_r^w\}_{w\in C}$, r συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του X και έστω $\vec{w}\in[V]^\infty$. Τότε, υπάρχουν $x_0\in X$ και μια extraction $\vec{u}\prec\vec{w}$ τέτοια ώστε*

$$R\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} T_s^w(x_0)=x_0 \text{ για κάθε } 1\le s\le r.$$

Επιπλέον, αν το (X,G) είναι ελαχιστικό, το σύνολο των στοιχείων x_0 είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι (X,G) ελαχιστικό, αλλιώς αντικαθιστούμε το X από ένα G-ελαχιστικό υποσύνολο του X. Για $r=1$ έχουμε το συμπάρασμα από το Θεώρημα 5.5.6. Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για r συστήματα. Έστω $\{T_1^w\}_{w\in C},\dots,\{T_{r+1}^w\}_{w\in C}$, $r+1$ όπως στην υπόθεση. Θέτουμε $S_s^w=T_s^w(T_{r+1}^w)^{-1}$ για κάθε $1\le s\le r$. Τότε $S_s^{w_1\star w_2}=S_s^{w_1}S_s^{w_2}$ για κάθε $1\le s\le r$ και $w_1<_{R_2}w_2$, καθώς όλες οι απεικονίσεις μετατίθενται. Από επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $y\in X$ και $\vec{u}\prec\vec{w}$ τέτοια ώστε $R_2\text{-}\lim_{w\in E(\vec{u})} S_s^w(y)=y$ για κάθε $1\le s\le r$.

Η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.16. □

Το Θεώρημα 5.5.12 έχει την ακόλουθη συνέπεια.

Πρόταση 5.5.13. *Έστω $\{T_1^w\}_{w\in C},\dots,\{T_r^w\}_{w\in C}$, r συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G από ομοιομορφισμούς του X, που δρα ελαχιστικά στο X. Για*

$\vec{w} \in [V]^\infty$ και U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ έτσι ώστε

$$\bigcap_{s=1}^{r} (T_s^w)^{-1}(U) \neq \emptyset \ \ \textit{για κάθε} \ \ w \in E(\vec{u}).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.5.12. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 3.1.17. □

Στη συνέχεια θα δούμε μια εφαρμογή των προηγούμενων στους χώρους Hilbert (δες ακόμα Κεφάλαιο 3 Παράγραφος 1). Θα δουλέψουμε σε C-συστήματα που παράγονται από unitary τελεστές .

Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και ότι το $\{T^w\}$ είναι ένα unitary C-σύστημα στον $\mathcal{H}$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ και $\vec{w} \in [V]^\infty$ βρίσκουμε $\vec{u}_x \prec \vec{w}$ ώστε το R_2-$\lim_{w \in E(\vec{u}_x)} T^w x$ να υπάρχει.

Αν $\{x_n\}_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, μπορούμε να βρούμε (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.5.1 για το συμπαγή μετρικό χώρο $\prod \mathcal{H}$) $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοιο ώστε R_2-$\lim_{w \in E(\vec{u})} T^w x_n$ να υπάχει για κάθε n. Αν το $\{x_n\}_n$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$, τότε το R_2-$\lim_{w \in E(\vec{u})} T^w x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$. Ο P είναι ένας γραμμικός τελεστής (τετριμμένο) και (όπως θα δούμε στο Θεώρημα 5.5.14) είναι ορθογώνια προβολή.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.6, αν για κάθε $x \in X$ έχουμε $T^w x \to Px$, τότε ο μετασχηματισμός όριο P ικανοποιεί τη σχέση $P^2 = P$.

Θεώρημα 5.5.14. *Αν το $\{T^w\}$ είναι ένα unitary C-σύστημα ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ και $\vec{w} \in [V]^\infty$, τότε υπάρχει $\vec{u} \prec \vec{w}$ τέτοιο ώστε R_2-$\lim_{w \in E(\vec{u})} T^w = P$ ασθενώς. Ο P είναι ορθογώνια προβολή σε υπόχωρο του $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 3.1.18. □

Θεώρημα 5.5.15. *Έστω $\{T_1^w\}, \ldots, \{T_l^w\}$, l unitary C-συστήματα που μετατίθενται σε χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και $\vec{w} \in [V]^\infty$. Αν $T_i^w \to P_i$ ασθενώς, τότε οι προβολές P_i μετατίθενται. Επιπλέον αν για κάποιο $\vec{u} \prec \vec{w}$ το R_2-$\lim_{w \in E(\vec{u})} T_1^w \ldots T_l^w$ υπάρχει, τότε το όριο είναι προβολή, η εικόνα του οποίου περιέχει την $P_1 \ldots P_l \mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 3.1.19. □

Μέσω της συνάρτησης g (δες προηγούμενη παράγραφο), όλα τα αποτελέσματα για $(D_i)_{i \in I}$-located λέξεις δίνουν ανάλογα αποτελέσματα για δίκτυα με δείκτες από ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση. Για παράδειγμα το Θεώρημα 5.5.12 και η Πρόταση 5.5.13 δίνουν τα ακόλουθα:

Θεώρημα 5.5.16. *Έστω $(S,+)$ μια άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$, $\{T_1^x\}_{x\in S},\dots,\{T_r^x\}_{x\in S}$, r συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Y, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του Y και έστω $\vec{w}\in[V]^\infty$. Τότε, υπάρχουν $y_0\in Y$ και μια extraction $\vec{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\prec\vec{w}$ τέτοια ώστε*

$$R_2\text{-}\lim_{x\in E(g(u_n)_{n\in\mathbb{N}})} T_s^x(y_0)=y_0 \text{ για κάθε } 1\le s\le r.$$

Επιπλέον, αν (Y,G) ελαχιστικό, το σύνολο των στοιχείων y_0 είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

Πρόταση 5.5.17. *Έστω $(S,+)$ μια άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_i >_{i\in I}$, $\{T_1^x\}_{x\in S},\dots,\{T_r^x\}_{x\in S}$, r συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Y, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του Y, που δρα ελαχιστκά στο Y. Για $\vec{w}\in[V]^\infty$ και U ένα μη κενό υποσύνολο του Y, υπάρχει $\vec{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\prec\vec{w}$ τέτοιο ώστε*

$$\bigcap_{s=1}^{r}(T_s^x)^{-1}(U)\neq\emptyset \text{ για κάθε } x\in E(g(u_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Το Θεώρημα 5.5.12 και η Πρόταση 5.5.13 για $I=\mathbb{Z}$ και $I=\mathbb{N}$ αντιστοίχως (για λόγους απλότητας παρουσιάζουμε μόνο τη μεταθετική περίπτωση) δίνουν τα ακόλουθα (για την απόδειξη, δες Πόρισμα 2.6.3):

Πόρισμα 5.5.18. *Έστω $(S,+)$ μια μεταθετική άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $D_n=\{y_{1,n},\dots,y_{k_n,n}\}$ για $n\ge 0$, $D_n=\{y_{-k_n,n},\dots,y_{-1,n}\}$ για $n<0$ με $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}\subseteq\mathbb{N}$, και $\{T_1^x\}_{x\in S},\dots,\{T_r^x\}_{x\in S}$, r συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Y, που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του Y. Τότε, υπάρχουν $y_0\in Y$, ακολουθίες $(\alpha_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$, $(H_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq[\mathbb{N}]_{>0}^{<\omega}$, $(L_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq[\mathbb{Z}^-]_{>0}^{<\omega}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, 1\le i\le m$, όπου $H_n^i\subsetneq E_n$, $L_n^i\subsetneq E_n$ και $E_n<E_{n+1}$, $H_n^i<H_{n+1}^i$, $L_n^i<L_{n+1}^i$ για κάθε $n\in\mathbb{N}, 1\le i\le m$ και μια ακολουθία $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\gamma_n=\sum_{t\in E_n\setminus\bigcup_{i=1}^m(H_n\cup L_n)}x_t^n$, $x_t^n\in D_t$ τέτοιες ώστε για κάθε συναρτήσεις $f_1,\dots,f_m,h_1,\dots,h_m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με $f_i(n)\le\alpha_n^i$ και $h_i(n)\le\beta_n^i$ για κάθε $n\in\mathbb{N}, 1\le i\le m$ να έχουμε*

$$R_2\text{-}\lim_{x\in FS((\gamma_n+\sum_{i=1}^m\sum_{t\in H_n^i}y_{f_i(n),t}+\sum_{i=1}^m\sum_{t\in L_n^i}y_{-h_i(n),t})_{n\in\mathbb{N}})}T_s^x(y_0)=y_0$$
$$\text{για κάθε } 1\le s\le r \text{ (οι όροι } \gamma_n=\textstyle\sum_{t\in\emptyset}x_t^n \text{ διαγράφονται).}$$

Επιπλέον, αν το (Y,G) είναι ελαχιστικό, το σύνολο των στοιχείων y_0 είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

Πόρισμα 5.5.19. *Έστω $(S,+)$ μια μεταθετική άπειρη ημιομάδα με ψηφιακή αναπαράσταση $< D_n >_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $D_n=\{y_{1,n},\dots,y_{k_n,n}\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$,*

$(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, *και* $\{T_1^x\}_{x\in S}, \dots, \{T_r^x\}_{x\in S}$, r *συστήματα από μετασχηματισμούς ενός συμπαγούς μετρικού χώρου* Y, *που περιέχονται σε μια μεταθετική ομάδα* G *από ομοιομορφισμούς του* Y, *που δρα ελαχιστικά στο* Y. *Για* U *ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του* Y, *υπάρχουν ακολουθίες* $(\alpha_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $(H_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]_{>0}^{<\omega}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}, 1 \leq i \leq m$, *όπου* $H_n^i \subseteq E_n$ *και* $E_n < E_{n+1}$, $H_n^i < H_{n+1}^i$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$ *και μια ακολουθία* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $\beta_n = \sum_{t\in E_n \setminus \bigcup_{i=1}^m H_n^i} x_t^n$, $x_t^n \in D_t$ *τέτοιες ώστε για κάθε συναρτήσεις* $f_1, \dots, f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με* $f_i(n) \leq \alpha_n^i$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$, *να έχουμε*

$$\bigcap_{s=1}^r (T_s^x)^{-1}(U) \neq \emptyset \text{ για κάθε } x \in FS((\beta_n + \sum_{i=1}^m \sum_{t\in H_n^i} y_{f_i(n),t})_{n\in\mathbb{N}})$$
$$\text{(οι όροι } \beta_n = \sum_{t\in\emptyset} x_t^n \text{ διαγράφονται).}$$

Σημειώσεις. Βεβαίως, μπορούμε να διατυπώσουμε και ανάλογα αποτελέσματα με αυτά των Θεωρημάτων 5.5.14 και 5.5.15 για ημιομάδες με ψηφιακή αναπαράσταση.

Βιβλιογραφία

[B] E. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, **17** (1974), 384–386.

[Be] M. Beiglböck, *A Multidimensional Central Sets Theorem*, Combinatorics, Probability and Computing, **15** (2006), 807–814.

[Bi] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. **9**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1927).

[BBH] V. Bergelson, A. Blass, N. Hindman, *Partition theorems for spaces of variable words*, Proc. London Math.Soc. **68** (1994), 449–476.

[BIP] T. Budak, N. Işik and J. Pym, *Subsemigroups of Stone-Čech compactifications*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **116** (1994), 99–118.

[C] T. Carlson, *Some unifying principles in Ramsey theory*, Discrete Math. **68** (1988), 117–169.

[E] E. Ellentuck, *A new proof that analytic sets are Ramsey*, J. Symb. Logic **39** (1974), 163–164.

[F1] V. Farmaki, *Classifications of Baire-1 functions and c_0-spreading models*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (2), (1994), 819–831.

[F2] V. Farmaki, *Ramsey dichotomies with ordinal index*, arXiv: math. LO/9804063 v1, (1998), electronic prepublication.

[F3] V. Farmaki, *Systems of Ramsey families*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Montena, L, (2002), 363–379.

[F4] V. Farmaki, *Ramsey Theory for Words over an infinite Alphabet*, arXiv: 0904.1948 v1, (2009).

[F5] V. Farmaki, *Ramsey and Nash-Williams combinatorics via Schreier families*, arXiv: math/0404014 v1, (2004).

[FK] V. Farmaki, A. Koutsogiannis, *Ramsey Theory for Words representing rationals*, to appear.

[FN1] V. Farmaki, S. Negrepontis, *Block Combinatorics*, Trans. Amer. Math. Soc. **358**, (2006), 2759–2779.

[FN2] V. Farmaki, S. Negrepontis, *Schreier sets in Ramsey theory*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[FeHS] S. Ferri, N. Hindman and D. Strauss, *Digital representation of semigroups and groups*, Semigroup Forum **77**, (2008), 36–63.

[Fu] H.Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press (1981).

[FuKa] H. Furstenberg, Y. Katznelson *Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory*, Israel J. Math. **68**, (1989), 257–270.

[FuW] H. Furstenberg, B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. d'Analyse Math. **34** (1978), 61–85.

[GRS] R. Graham, B. Rothschild and J. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley, New York (1980).

[HaJ] A.W.Hales and R.I.Jewett, *Regularity and Positional Games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106**, (1963), 222–229.

[H] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Combinatorial Theory, Ser. A **17** (1974), 1–11.

[HS] N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification*, de Gruyter Expositions in Mathematics **27**, (1998).

[Mc] Randall McCutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1999).

[M] K. Milliken, *Ramsey's theorem with sums or unions*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, **18** (1975), 276–290.

[NaWi] C. St. J. A. Nash-Williams, *On well quasiordering transfinite sequences*, Proc. Camb. Phil. Soc. **61** (1965), 33–39.

[R] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (2), (1929), 264–286.

[T] A. Taylor, *A canonical partition relation for finite subsets of ω*, J. Combinatorial Theory, Ser. A **21** (1976), 137–146.

[vdW] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.