ΘΕΩΡΗΜΑ FURSTENBERG-WEISS, ΘΕΩΡΗΜΑ GALLAI ΚΑΙ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

0.1 Το θεώρημα των Furstenberg-Weiss

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να αποδειχθεί το θεώρημα των Furstenberg-Weiss, το οποίο αποτελεί, στη γενική του μορφή, που διατυπώνουμε παρακάτω, την τοπολογική έκφραση του πολυδιάστατου θεωρήματος του van der Waerden, Θεώρημα Gallai που αποδεικνύεται στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 0.1.1. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, \dots, T_l : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις που ανα δύο μετατίθενται. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \to \infty$ με $T_i^{n_k} x \to x$ ταυτόχρονα για $i = 1, \dots, l$ (ένα τέτοιο σημείο καλείται* **πολλαπλώς recurrent** *ως προς $T_1, \dots, T_l$).*

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση του κλασσικού αποτελέσματος του Birkhoff σύμφωνα με το οποίο αν X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει recurrent στοιχείο $x \in X$, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ στοιχείο και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \to \infty$ ώστε $T^{n_k} x \to x$.

Πράγματι, αρκεί να δειθεί ότι για κάθε ανοικτή περιοχή κάποιου σημείου $x \in X$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η εικόνα $T^n x$ να πέφτει στην ανοικτή αυτή περιοχή. Τότε, επιλέγοντας περιοχές των οποίων η διάμετρος τείνει στο μηδέν, έχουμε το ζητούμενο.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{\emptyset \neq Y \subseteq X \text{ κλειστό: } T(Y) \subseteq Y\}.$$

Αν πάρουμε μια ολικά διατεταγμένη οικογένεια από στοιχεία της $\mathcal{F}$ τότε η τομή τους είναι μη-κενή από συμπάγεια και ανοίκει στο $\mathcal{F}$. Από Λήμμα Zorn υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο Y_0 στην $\mathcal{F}$. Αν $x \in Y_0$ έχουμε ότι

$$Y = \overline{\{T^n x : \ n \in \mathbb{N}\}} \subseteq Y_0$$

όπου Y είναι κλειστό και T αναλλοίωτο. Από ελαχιστικότητα του Y_0 έχουμε ότι $Y = Y_0$, και άρα το ζητούμενο.

Παρατήρηση 0.1.2. *Η ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ στο αποτέλεσμα του Birkhofff μπορεί να επιλεγεί γνησίως αύξουσα.*

Πράγματι, έστω $x \in X$ recurrent. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n(\delta) \in \mathbb{N}$: $d(T^{n(\delta)}(x), x) < \delta$ (1).
Άρα, υπάρχουν
$n_1 \in \mathbb{N} : d(T^{n_1}(x), x) < 1$

$n_2 > n_1 \in \mathbb{N} : d(T^{n_2}(x), x) < 1/2$

(Πράγματι, από (1) υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N} : d(T^{k_1}(x), x) < 1/2$. Έστω, από συνέχεια της T^{k_1}, $\delta > 0$ ώστε για $d(z, x) < \delta$ να ισχύει $d(T^{k_1}(z), T^{k_1}(x)) < 1/2 - d(T^{k_1}(x), x)$. Τότε $d(T^{k_1}(z), x) < 1/2$. Από (1), υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$: $d(T^{k_2}(x), x) < \delta$, άρα $d(T^{k_1+k_2}(x), x) < 1/2$ με $k_1 + k_2 > k_1$. Επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα αυτό μέχρι $k_1 + \ldots + k_j > n_1$, μετά από πεπερασμένα βήματα.)

και επαγωγικά βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $d(T^{n_k}(x), x) < 1/n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, από όπου έπεται το ζητούμενο.

Ακολούθως, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τα ενδιάμεσα βήματα προκειμένου να αποδείξουμε το αποτέλεσμα των Furstenberg-Weiss.

Λήμμα 0.1.3. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $A \subseteq X$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in A$, και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $d(T^n y, x) < \varepsilon$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $z \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $d(T^n z, z) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $z_0 \in A$. Για $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ υπάρχουν (από υπόθεση) $z_1 \in A$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ με

$d(T^{n_1} z_1, z_0) < \varepsilon_1$.

Έστω τώρα (από ομοιόμορφη συνέχεια του T^{n_1}) $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ τέτοιο, ώστε οποτεδήποτε $d(z, z_1) < \varepsilon_2$ να έχουμε

$d(T^{n_1} z, z_0) < \varepsilon_1$.

Βρίσκουμε $z_2 \in A$ και $n_2 \in \mathbb{N}$ με

$d(T^{n_2} z_2, z_1) < \varepsilon_2$.

Έστω $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ τέτοιο, ώστε οποτεδήποτε $d(z, z_2) < \varepsilon_3$ να έχουμε

$d(T^{n_2} z, z_1) < \varepsilon_2$.

Ανάλογα, ορίζουμε $z_0, z_1, \ldots, z_k \in A$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in (0, \varepsilon/2]$, ώστε

$d(T^{n_i} z_i, z_{i-1}) < \varepsilon_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ορίζουμε $0 < \varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k$ τέτοιο, ώστε οποτεδήποτε $d(z, z_k) < \varepsilon_{k+1}$ να έχουμε

$d(T^{n_k} z, z_{k-1}) < \varepsilon_k$.

Από υπόθεση, βρίσκουμε $z_{k+1} \in A$ και $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ ώστε

$d(T^{n_{k+1}} z_{k+1}, z_k) < \varepsilon_{k+1}$.

Επαγωγικά κατασκευάζουμε $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ και $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \varepsilon/2]$ που ικανοποιούν τα προηγούμενα. Τότε για $i < j$ ισχύει ότι

$d(T^{n_j+n_{j-1}+\ldots+n_{i+1}} z_j, z_i) < \varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_1 = \varepsilon/2 \qquad (*)$.

Πράγματι, $d(T^{n_j} z_j, z_{j-1}) < \varepsilon_j \Rightarrow d(T^{n_j+n_{j_1}} z_j, z_{j-2}) < \varepsilon_{j-1} \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow d(T^{n_j+n_{j-1}+\ldots+n_{i+1}} z_j, z_i) < \varepsilon_{i+1}$. Ο χώρος X είναι συμπαγής (ισοδύναμα ακολουθιακά συμπαγής), άρα μπορούμε να βρούμε $i < j$ με $d(z_i, z_j) < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(*)$ έχουμε ότι

$d(T^{n_j+n_{j-1}+\ldots+n_{i+1}}z_j, z_j) < \varepsilon.$
Θέτουμε $z = z_j$ και $n = n_j + n_{j-1} + \ldots + n_{i+1}$ και έχουμε το συμπέρασμα του λήμματος. $\square$

Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια του homogeneous ως προς T υποσυνόλου ενός δυναμικού συστήματος (X, T). Θα δείξουμε ότι, όταν ένα σύνολο A είναι homogeneous, τότε μπορούμε να εξασθενίσουμε τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος παίρνοντας ταυτόχρονα (όπως θα φανεί στην απόδειξη) ισχυρότερο συμπέρασμα.

Ορισμός 0.1.4. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση και A κλειστό υποσύνολο του X. Το A καλείται* **homogeneous** *ως προς T αν υπάρχει ομάδα G από ομοιομορφισμούς του X, καθένας από τους οποίους μετατίθεται με την T και αφήνουν το A αναλοίωτο, έτσι, ώστε το δυναμικό (υπο)σύστημα (A, G) είναι ελαχιστικό (δηλαδή κανένα γνήσιο μη κενό κλειστό υποσύνολο του A δεν είναι αναλοίωτο μέσω της δράσης της G).*

Ορισμός 0.1.5. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση και A κλειστό υποσύνολο του X. Το A καλείται* **recurrent** *ως προς T αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in A$, υπάρχει $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $d(T^n y, x) < \varepsilon$.*

Λήμμα 0.1.6. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση και A homogeneous ως προς T υποσύνολο του X. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $d(T^n y, x) < \varepsilon$, τότε το A είναι recurrent.*

Απόδειξη. Έστω G ομάδα ομοιομορφισμών που μετατίθενται με την T, αφήνει το A αναλοίωτο ώστε (A, G) ελαχιστικό. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο F της G ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει
$\min_{g \in F} d(gx, y) < \varepsilon/2.$
Πράγματι, αν $\{U_i\}_i$ πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του A από σύνολα με διάμετρο $< \varepsilon/2$, τότε για κάθε U_i μπορούμε να βρούμε (από ελαχιστικότητα) πεπερασμένο σύνολο $\{g_{ij}\}_j \subseteq G$ τέτοιο ώστε
$\bigcup_j g_{ij}^{-1} U_i = A.$
Το σύνολο $F = \{g_{ij}\}_{i,j} \subseteq G$ ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση για κάθε $x, y \in A$. Δοσμένου του F, βρίσκουμε (από ομοιόμορφη συνέχεια των στοιχείων του F) $\delta > 0$ ώστε οποτεδήποτε $d(x_1, x_2) < \delta$ να έχουμε $d(gx_1, gx_2) < \varepsilon/2$ για κάθε $g \in F$. Από υπόθεση βρίσκουμε $x, y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^n y, x) < \delta$. Έστω τώρα τυχαίο στοιχείο $z \in A$. Από τον ισχυρισμό υπάρχει $g \in F$ με $d(gx, z) < \varepsilon/2$. Ο g μετατίθενται με την T, άρα
$d(T^n gy, gx) = d(gT^n y, gx) < \varepsilon/2,$
καθώς $d(T^n y, x) < \delta$. Τέλος, έχουμε ότι
$d(T^n gy, z) \leq d(T^n gy, gx) + d(gx, z) < \varepsilon$, άρα A recurrent. $\square$

Πρόταση 0.1.7. *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος, υπάρχει $x \in A$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \to \infty$ με $T^{n_k}x \to x$ (τα σημεία αυτά καλούνται* **recurrent** *ως προς T).*

Απόδειξη. Έστω G ομάδα ομοιομορφισμών που μετατίθενται με την T, αφήνει το A αναλοίωτο ώστε (A, G) ελαχιστικό. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα

$E_n = \{x \in A : \inf_k d(T^k x, x) \geq 1/n\}$.

Αν το συμπέρασμα δεν ισχύει, τότε έχουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε $E_n^\circ = \emptyset$, αντίφαση (καθώς κάθε E_n είναι κλειστό) στο θεώρημα κατηγορίας του Baire.

Αν $E_n^\circ \neq \emptyset$ για κάποιο n, τότε (από ελαχιστικότητα του (A, G)) έχουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{j=1}^r g_j^{-1}(E_n^\circ)$ για κάποια $g_1, \ldots, g_r \in G$. Έστω $\delta > 0$ ώστε αν $d(x_1, x_2) < \delta$ τότε $d(g_j x_1, g_j x_2) < 1/n$ για κάθε $1 \leq j \leq r$, από ομοιόμορφη συνέχεια των $g_1, \ldots, g_r \in G$. Θα δείξουμε ότι αν $x \in g_j^{-1}(E_n^\circ)$ για κάποιο $1 \leq j \leq r$, τότε $\inf_k d(T^k x, x) \geq \delta$. Πράγματι, αν $x \in g_j^{-1}(E_n^\circ)$ για κάποιο $1 \leq j \leq r$ και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^k x, x) < \delta$, τότε

$d(T^k g_j x, g_j x) = d(g_j T^k x, g_j x) < 1/n$ για κάθε $1 \leq j \leq r$,

ή

$d(T^k y, y) < 1/n$ για κάποιο $y \in E_n^\circ$, αντίφαση. Καθώς κάθε $x \in A$ ανήκει σε κάποιο $g_j^{-1}(E_n^\circ)$, $1 \leq j \leq r$, έχουμε δείξει ότι

$\inf_k d(T^k x, x) \geq \delta$ για κάθε $x \in A$,

άτοπο με βάση το προηγούμενο λήμμα. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα των Furstenberg-Weiss στην ειδική περίπτωση που οι απεικονίσεις $T_1, \ldots, T_l$ είναι ομοιομορφισμοί.

Πρόταση 0.1.8. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, \ldots, T_l : X \to X$ ομοιομορφισμοί που ανα δύο μετατίθενται. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \to \infty$ με $T_i^{n_k} x \to x$ ταυτόχρονα για $i = 1, \ldots, l$.*

Απόδειξη. Έστω G η ομάδα ομοιομορφισμών του X που παράγεται από τους $T_1, \ldots, T_l$. Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι (X, G) ελαχιστικό. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο l.

Για $l = 1$ έχουμε το αποτέλεσμα από το θεώρημα του Birkhoff. Έστω ότι έχουμε το συμπέρασμα για οποιοδήποτε σύνολο $l - 1$ ομοιομορφισμών που μετατίθενται, και έστω $T_1, \ldots, T_l$ ομοιομορφισμοί που ανα δύο μετατίθενται. Θεωρούμε τον συμπαγή μετρικό χώρο $X^l = X \times \ldots \times X$ και έστω Δ^l το διαγώνιο υποσύνολο του X^l που αποτελείται από l-άδες της μορφής $(x, \ldots, x)$. Θέτουμε $T = T_1 \times \ldots \times T_l$ και θεωρούμε την G να δρα στον X^l ταυτίζοντας κάθε στοιχείο g της G με το $g \times \ldots \times g$. Παρατηρούμε ότι το Δ^l είναι homogeneous ως προς T υποσύνολο του X^l καθώς ο T μετίθεται με τη δράση της G. Ισχυριζόμαστε ότι το Δ^l ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 0.1.6.

Πράγματι, θέτουμε $R_i = T_i T_l^{-1}$ για $i = 1, \ldots, l-1$, και έστω (από επαγωγική υπόθεση) $y \in X$ με $R_i^{n_k} y \to y$ για κάθε $i = 1, \ldots, l-1$ για κάποια ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \to \infty$. Θέτουμε

$x^* = (y, \ldots, y) \in \Delta^l$ και

$y_k^* = (T_l^{-n_k} y, \ldots, T_l^{-n_k} y) \in \Delta^l$.

Για k μεγάλο έχουμε ότι το $T^{n_k} y_k^* = (R_1^{n_k} y, \ldots, R_{l-1}^{n_k} y, y)$ είναι κοντά στο $x^* = (y, \ldots, y)$ με $x^*, y_k^* \in \Delta^l$. Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 0.1.7. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 0.1.8 μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το αποτέλεσμα στη γενική του μορφή.

Απόδειξη του Θεωρήματος 0.1.1. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα που αντικαθιστά την δράση μιας ημιομάδας με τη δράση μιας ομάδας. Έστω $\Omega = X^{\mathbb{Z}^l}$ και ομοιομορφισμοί

$S_i \omega(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_l) = \omega(n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_l)$, για $i = 1, \ldots, l$.

Έστω $\widetilde{X} \subseteq \Omega$ το σύνολο που ικανοποιεί

$(*)\quad S_i \omega(n_1, \ldots, n_l) = T_i \omega(n_1, \ldots, n_l)$, για $i = 1, \ldots, l$

για κάθε $(n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$. Το σύνολο $\widetilde{X}$ είναι κλειστό (τετριμμένο) και μη κενό. Πράγματι, για $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$\omega_n(n_1, \ldots, n_l) = T_1^{n_1+n} \ldots T_l^{n_l+n} x$

για $n_i \geq -n$. Ορίζουμε ω_n τυχαία στα άλλα σημεία. Το ω_n ικανοποιεί την $(*)$ για κάθε $n_i \geq -n$. Άρα ένα οριακό σημείο της ω_n στο Ω θα ανήκει στο $\widetilde{X}$. Ακόμα, το $\widetilde{X}$ είναι αναλοίωτο από τους S_i, S_i^{-1} για $1 \leq i \leq l$. Από Πρόταση 0.1.8 έχουμε ότι υπάρχει $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ πολλαπλώς recurrent σημείο ως προς $S_1, \ldots, S_l$. Από την ισχύ της $(*)$ έχουμε ότι κάθε συνιστώσα του $\widetilde{x}$ είναι πολλαπλώς recurrent σημείο ως προς $T_1, \ldots, T_l$. □

0.2 Πολυδιάστατο Θεώρημα van der Waerden

Έχουμε δει ότι το θεώρημα των Furstenberg-Weiss για $l = 1$ συνεπάγεται το θεώρημα του van der Waerden. Ο Gallai επεξέτεινε το αποτέλεσμα αυτό σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Διατυπώνουμε πρώτα την γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος van der Waerden, η οποία μας οδηγεί στο Θεώρημα Gallai, που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ακολούθως.

Παρατηρούμε ότι αν $A \subseteq \mathbb{N}$ σύνολο που περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους, τότε το A θα περιέχει και ομοθετικά αντίγραφα κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου του $\mathbb{N}$ (δηλαδή αν $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τότε υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ ώστε $a + bF \subseteq A$). Πράγματι, αν $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $F \subseteq \{1, \ldots, N\}$. Κάθε αριθμητική πρόοδος μήκους N, $\{a+b, \ldots, a+Nb\}$ περιέχει την έκφραση $a+bF$. Στην πολυδιάστατη περίπτωση έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 0.2.1. *Έστω $\mathbb{N}^m = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, $m, r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ τέτοιο, ώστε το σύνολο A_{i_0} έχει την ιδιότητα αν F πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$, τότε για κάποια $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$, $a + bF \subseteq A_{i_0}$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί για δοσμένο πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{N}^m$ να βρούμε σύνολο A_j που κανοποιεί το συμπέρασμα. Πράγματι, υπάρχουν μόνο πεπερασμένες επιλογές για το A_j και επειδή μια ακολουθία F_n πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}^m$ μπορεί να επιλεγεί ώστε τα στοιχεία της να περιέχουν όλα τα προηγούμενα (για παράδειγμα $F_n = \{1, \ldots, n\}^m$) και κάθε πεπερασμένο F περιέχεται σε κάποιο από αυτά, ένα σύνολο A_j που ικανοποιεί το συμπέρασμα για άπειρα F_n (τέτοιο υπάρχει από αρχή περιστεραιώνα) θα κάνει για όλα τα F. Έστω λοιπόν $F = \{e_1, \ldots, e_l\} \subseteq \mathbb{N}^m$ δοσμένο.

Θεωρούμε το χώρο $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}^m}$ που γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος αν εφοδιαστεί με τη μετρική

$$d(\omega, \omega') = \inf\{1/k : \ \omega(i_1, \ldots, i_m) = \omega'(i_1, \ldots, i_m) \text{ για } 1 \leq i_1, \ldots, i_m < k\}.$$

Θεωρούμε συνεχείς συναρτήσεις $T_i : \Omega \to \Omega$ με $T_i\omega(n) = \omega(n + e_i)$, $i = 1, \ldots, l, n \in \mathbb{N}^m$. Ορίζουμε ένα σημείο $\omega \in \Omega$ με κανόνα

$$\omega(n) = i \iff n \in A_i,$$

και έστω

$$X = \overline{\{T_1^{n_1} \ldots T_l^{n_l}\omega : \ n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}\}} \subseteq \Omega.$$

Από το Θεώρημα 0.1.1 υπάρχουν $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(T_1^n x, x) < 1, \ldots, d(T_l^n x, x) < 1,$$

από το οποίο για $e = (1, \ldots, 1)$ έχουμε

$$x(e) = x(e + ne_1) = \ldots = x(e + ne_l).$$

Το x είναι στοιχείο του X, άρα θα είναι κοντά σε ένα στοιχείο της μορφής $T_1^{n_1} \ldots T_l^{n_l}\omega$ για κάποια $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$, από το οποίο, αν θέσουμε $a = e + n_1e_1 + \ldots + n_le_l$ έπεται

$$\omega(a) = \omega(a + ne_1) = \ldots = \omega(a + ne_l) \iff a + nF \subseteq A_{\omega(a)}. \qquad \square$$

0.3 Εφαρμογές στις Διοφαντικές Προσεγγίσεις

Μια πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}^m$ ορίζει μια συνάρτηση από το $\mathbb{N}^m$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο. Το θεώρημα του Gallai δίνει, ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι σταθερή σε κάποιο ομοθετικό αντίγραφο $a + bF$ κάθε πεπερασμένου συνόλου F. Θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό σε συναρτήσεις με τιμές σε συμπαγή μετρικό χώρο.

Θεώρημα 0.3.1. *Έστω Λ συμπαγής μετρικός χώρος, $m \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \Lambda$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε $a \in \mathbb{N}^m, b \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $f(a + bF)$ έχει διάμετρο $< \varepsilon$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε κάλυψη $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{r} U_j, r \in \mathbb{N}$ με $diam(U_j) < \varepsilon$ για κάθε $1 \leq j \leq r$. Τότε, $\mathbb{N}^m = \bigcup_{j=1}^{r} f^{-1}(U_j)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 0.2.1 σε αυτή τη διαμέριση παίρνουμε το ζητούμενο. □

Μια εφαρμογή του προηγούμενου είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 0.3.2. *Για κάθε πραγματικό αριθμό α και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να λύσουμε τη διοφαντική ανισότητα*
$|\alpha n^2 - m| < \varepsilon, \;\; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{N} \to C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\}$, με $f(n) = e^{in^2\pi\alpha}$. Για $\varepsilon > 0$, από το Θεώρημα 0.3.1, υπάρχουν n και $h \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(n) - f(n+h)| < \varepsilon$ και $|f(n) - f(n+2h)| < \varepsilon$.

Από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$|1 - e^{i(2nh+h^2)\pi\alpha}| < \varepsilon \text{ και } |1 - e^{i(4nh+4h^2)\pi\alpha}| < \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $\cos(x) \leq 1$ για κάθε x, έχουμε $|1 - e^{2ix}| \leq 2|1 - e^{ix}|$. Τότε, γράφοντας $2h^2\pi\alpha = [(4nh + 4h^2) - 2(2nh + h^2)]\pi\alpha$, έχουμε

$$|1 - e^{2ih^2\pi\alpha}| \leq 2|1 - e^{i(2nh+h^2)\pi\alpha}| + |1 - e^{i(4nh+4h^2)\pi\alpha}| < 3\varepsilon.$$

Άρα, θέτοντας $\xi = h^2\alpha - [h^2\alpha]$, έχουμε

$$|1 - e^{2\pi i\xi}| < 3\varepsilon \;\Leftrightarrow\; 2\sin(\pi\xi) < 3\varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x, \; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, έχουμε:

(i) Αν $\pi\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε για $m = [h^2\alpha]$ έχουμε $|h^2\alpha - m| < \varepsilon$.
Πράγματι, $\pi\xi \leq \frac{\pi}{2}\sin(\pi\xi) < \frac{\pi}{2}\frac{3\varepsilon}{2}$, άρα $|\xi| = |h^2\alpha - m| < \varepsilon$.

(ii) Αν $\pi\xi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ τότε για $m = [h^2\alpha] + 1$ έχουμε $|h^2\alpha - m| < \varepsilon$.
Πράγματι, $\pi - \pi\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, άρα από πριν $|1 - \xi| = |h^2\alpha - m| < \varepsilon$.

Συνοψίζοντας, υπάρχουν $h \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $|\alpha h^2 - m| < \varepsilon$. □

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την πολυδιάστατη έκφραση του Θεωρήματος 0.3.1.

Θεώρημα 0.3.3. *Έστω $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}$ και $f_1 : \mathbb{N}^{m_1} \to X_1, \ldots, f_s : \mathbb{N}^{m_s} \to X_s$, s τυχαίες συναρτήσεις με τιμές στους συμπαγείς μετρικούς χώρους $X_1, \ldots, X_s$ αντίστοιχα. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $F_1 \subseteq \mathbb{N}^{m_1}, \ldots, F_s \subseteq \mathbb{N}^{m_s}$, s πεπερασμένα υποσύνολα, υπάρχουν $\alpha_i \in \mathbb{N}^{m_i}, 1 \leq i \leq s$, και $b \in \mathbb{N}$ ώστε τα σύνολα $f_i(\alpha_i + bF_i)$ να έχουν διάμετρο $< \varepsilon$ για κάθε $1 \leq i \leq s$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση γινόμενο $f_1 \times \ldots \times f_s : \mathbb{N}^{m_1+\ldots+m_s} \to X_1 \times \ldots \times X_s$ και το πεπερασμένο σύνολο $F = F_1 \times \ldots \times F_s$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 0.3.1. □

Μια εφαρμογή του προηγούμενου είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 0.3.4. *Αν* $p(x)$ *είναι πραγματικό πολυώνυμο με* $p(0) = 0$, *τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *μπορούμε να λύσουμε τη διοφαντική ανισότητα*
$|p(n) - m| < \varepsilon, \ \ n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}.$

Απόδειξη. Έστω $p(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x$. Γράφουμε $p(x) = s_n A_n x^n + \ldots + s_1 A_1 x$, όπου $A_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r!}{j!(r-j)!} j^r, \ r = 1, \ldots, n$.

Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ των πραγματικών αριθμών modulo 1. Θεωρούμε την απόσταση από τον κοντινότερο ακέραιο $\|x\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|$. Για κάθε $r = 1, \ldots, n$ θέτουμε $f_r(m) = s_r m^r (mod 1)$. Από το Θεώρημα 0.3.3 βρίσκουμε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, και $b \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_r(\alpha_r + jb) - f_r(\alpha_r)\| < \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \ j = 1, \ldots, r.$$

Έχουμε ότι $\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r!}{j!(r-j)!} f_r(\alpha_r + jb) = A_r f_r(b)$,
καθώς $\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r!}{j!(r-j)!} (x + jy)^r = A_r y^r$. Ακόμα,

$$\textstyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r!}{j!(r-j)!} f_r(\alpha_r) = 0 \text{ και } \sum_{j=0}^{r} \frac{r!}{j!(r-j)!} = 2^r,$$

άρα $\|A_r f_r(b)\| = \| \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r!}{j!(r-j)!} (f_r(\alpha_r + jb) - f_r(\alpha_r))\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} 2^r, \ r = 1, \ldots, n$ και άρα

$$\|p(b)\| < \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} (\textstyle\sum_{r=1}^{n} 2^r) < \varepsilon,$$

απο όπου έπεται το ζητούμενο. □

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1) H.Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, 1981.
(2) K.Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

Andreas Koutsogiannis:
Department of Mathematics, Athens University, Panepistemiopolis, 15784 Athens, Greece
E-mail address: akoutsos@math.uoa.gr