Ανδρέας Σ. Κουτσογιάννης

ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ RAMSEY
Θεωρήματα van der Waerden, Carlson και Szemerédi

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Β. Φαρμάκη

Αθήνα, 2008

Στην οικογένειά μου...
που μεγαλώνει συνέχεια

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Α.Γιαννόπουλο και κ. Α.Κατάβολο για τις γνώσεις που μου έχουν προσφέρει μέχρι σήμερα, για όλες τις υποδείξεις τους που με βοήθησαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, και για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής μου. Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Ν.Παπαναστασίου, που πρώτος με δίδαξε πότε μια ακολουθία λέγεται συγκλίνουσα, για τις γνώσεις που μου έχει προσφέρει και για την υπόδειξή του στο να επιλέξω το μάθημα της κ. Β.Φαρμάκη. Σας ευχαριστώ που οι πόρτες των γραφείων σας ήταν πάντοτε ανοιχτές για μένα.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τα πολύ κοντινά μου πρόσωπα, την οικογένειά μου και κάποιους φίλους μου για την σημαντική ψυχολογική στήριξη που μου παρείχαν αδιάκοπα όλα αυτά τα χρόνια και ιδιαίτερα τους τελευταίους μήνες. Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω λίγο παραπάνω την ανηψιά μου Κατερίνα, που ένα χαμόγελό της αρκεί να με γεμίσει ενέργεια και να με κάνει πραγματικά ευτυχισμένο.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα μου Σωτήρη, την φίλη μου Δανάη και τον φίλο μου Γιάννη, για τις διορθώσεις που έκαναν στο αρχικό κείμενο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την δασκάλα και επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κ. Β.Φαρμάκη, που με δίδαξε ενδιαφέροντα μαθηματικά, με έμαθε να σκέφτομαι ωριμότερα, να γράφω σωστά, και που με κέρδισε από την πρώτη ώρα της διδασκαλίας της. Την ευχαριστώ που με αντιμετώπισε σαν δικό της άνθρωπο και δεν με παραμέλησε ποτέ ανεξάρτητα από τις δικές της υποχρεώσεις, μοιράζοντας τόσους μήνες μαζί μου τον χώρο του γραφείο της, που είναι ο ιερός χώρος εργασίας κάθε μαθηματικού.

Σας ευχαριστώ θερμά όλους,

Ανδρέας

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή 1

2 Προαπαιτούμενα 5

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων 5
2.2 Στοιχεία Πραγματικής Ανάλυσης 11
2.3 Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου 15
2.4 Στοιχεία Τοπολογίας και Συναρτησιακής Ανάλυσης 30
2.5 Στοιχεία Θεωρίας Τελεστών 36
2.6 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων 42

3 Θεωρία Ramsey 45

3.1 Θεώρημα Ramsey 45
3.2 Ο χώρος των Υπερφίλτρων 47
3.3 Γενικευμένο Θεώρημα Hindman 55
3.4 Ελαχιστικά Ταυτοδύναμα Υπερφίλτρα 57
3.5 Γενικευμένο Θεώρημα Carlson 61
3.6 Θεωρήματα van der Waerden και Hales-Jewett 67

4 Δυναμικά Συστήματα - Εργοδικότης 69

4.1 Δυναμικά Συστήματα 69
4.2 Εργοδικά Θεωρήματα για Δυναμικά Συστήματα 75
4.3 Εργοδικά Δυναμικά Συστήματα 86

5 Ασθενώς Mixing Δυναμικά Συστήματα 91

5.1 $*-$Σύγκλιση Μιγαδικών Ακολουθιών 91
5.2 Mixing, Ασθενώς Mixing Δυναμικά Συστήματα 100

6 Συμπαγή Δυναμικά Συστήματα 117

6.1 Σχεδόν Περιοδικές Συναρτήσεις 117
6.2 Συμπαγή Δυναμικά Συστήματα 122

7 Διάσπαση Δυναμικού Συστήματος 131
7.1 Διάσπαση Συστήματος Lebesgue 131
7.2 Skew-Γινόμενο 135

8 Επεκτάσεις Δυναμικών Συστημάτων 139

9 Εργοδικό Θεώρημα Furstenberg 149
9.1 Szemerédi Ιδιότητες 149
9.2 Απόδειξη Θεωρήματος Furstenberg 151

10 Θεώρημα Szemerédi 159

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται βασικά θέματα δύο περιοχών των μαθηματικών, της θεωρίας Ramsey και της εργοδικής θεωρίας.

Ουσιαστικά, η αρχή της θεωρίας Ramsey έγινε με το θεώρημα που απέδειξε ο van der Waerden [29] (Θεώρημα 3.6.4.), το 1927, σύμφωνα με το οποίο αν διαμερισθεί το σύνολο των φυσικών αριθμών σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε κάποιο από αυτά περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους. Πολύ αργότερα, το 1963, οι Hales-Jewett [16], εισάγοντας την έννοια της λέξης ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο, έδωσαν μια καθαρά συνδυαστική απόδειξη του θεωρήματος του van der Waerden, αποδεικνύοντας ένα διαμεριστικό θεώρημα για λέξεις (Θεώρημα 3.6.3.).

Το όνομα της θεωρίας Ramsey οφείλεται στον F.Ramsey, ο οποίος το 1930 απέδειξε ότι αν τα δισύνολα των φυσικών αριθμών διαμερισθούν σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο των φυσικών αριθμών, ώστε όλα τα δισύνολά του να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης (Θεώρημα 3.1.1.), ένα θεώρημα που βρήκε εφαρμογές στους περισσότερους κλάδους των μαθηματικών. Βασικά, η θεωρία Ramsey αναφέρεται σε αποτελέσματα όπου για δοθείσα πεπερασμένη διαμέριση κάποιας δομής αποδεικνύεται η ύπαρξη μίας ανάλογης υποδομής σε ένα σύνολο της διαμέρισης. Η πρώτη ουσιαστική επέκταση του θεωρήματος του Ramsey, δόθηκε από τον Hindman, 1974 [18] και τους Milliken, 1975 [20] - Taylor, 1976 [28]. Σύμφωνα με το θεώρημα του Hindman (Θεώρημα 3.3.2.), αν οι φυσικοί αριθμοί διαμερισθούν σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα, τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο των φυσικών αριθμών του οποίου όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα βρίσκονται στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης. Το ανάλογο αποτέλεσμα για πεπερασμένες διαμερίσεις των δισυνόλων των φυσικών αριθμών, αποδείχθηκε από τους Milliken-Taylor και ουσιαστικά επεκτάθηκε το θεώρημα του Ramsey.

Στη συνέχεια, οι Carlson, 1988 [3] και Furstenberg-Katznelson, 1989 [12] απέδειξαν δαμεριστικά θεωρήματα για λέξεις ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο, ενοποιώντας και ισχυροποιώντας τους δύο κλάδους της θεωρίας Ramsey, δηλαδή τον κλάδο των θεωρημάτων van der Waerden και Hales-Jewett με τον κλάδο των Θεωρημάτων Ramsey, Hindman και Milliken-Taylor. Στην Παράγραφο 3.5 και ειδικότερα στο Θεώρημα 3.5.11. δίνουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος Carlson, που εμπεριέχεται στο [9] της Β.Φαρμάκη, και αποδεικνύουμε, ως συνέπειες αυτού, τα Θεωρήματα Hindman, Hales-Jewett και van der Waerden.

Το 1936 οι Erdös και Turán, ερευνώντας για ένα αποτέλεσμα πυκνότητας ως προς το Θεώρημα van der Waerden, διατύπωσαν την εικασία ότι κάθε υποσύνολο των ακεραίων θετικής πυκνότητας, περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους ([7]). Η εικασία αυτή απαντήθηκε θετικά σε στάδια. Ο K.F.Roth, χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους, απέδειξε το 1952 ότι ένα σύνολο θετικής πυκνότητας στους ακεραίους περιέχει αριθμητικές προόδους μήκους 3 ([24]). Το 1969, ο E.Szemerédi απέδειξε ότι τέτοια σύνολα περιέχουν αριθμητικές προόδους μήκους 4 ([26]). Τελικά, το 1975, ο Szemerédi, χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα, απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα ([27]):

Θεώρημα (Szemerédi). Έστω E υποσύνολο των ακεραίων με θετική άνω πυκνότητα Banach. Τότε το E περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους.

Ο Furstenberg το 1977 έδωσε μια απόδειξη του Θεωρήματος Szemerédi με εργοδικές μεθόδους ([14]), δημιουργώντας έναν καινούργιο πρόσφορο κλάδο των μαθηματικών, την εργοδική θεωρία Ramsey. Απέδειξε (Πρόταση 10.0.1.) ότι το Θεώρημα Szemerédi είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο εργοδικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα (Furstenberg). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και απεικόνιση φ που διατηρεί το μέτρο. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο k, υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε

$$\mu(\bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jn}(A)) > 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται πλήρως στα Κεφάλαια 9 και 10. Βασικές έννοιες για την απόδειξη του θεωρήματος του Furstenberg, είναι οι έννοιες του ασθενώς mixing και του συμπαγούς δυναμικού συστήματος, οι οποίες χαρακτηρίζονται πλήρως στα Κεφάλαια 5 και 6. Αξιοσημείωτη είναι η διχοτομία που ισχύει μεταξύ των δύο αυτών εννοιών: Αν ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$

δεν είναι ασθενώς mixing, τότε υπάρχει μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ώστε το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ να είναι συμπαγές. Η διχοτομία αυτή μεταφέρεται στις επεκτάσεις ενός δυναμικού συστήματος, οι οποίες ορίζονται στο Κεφάλαιο 7. Συγκεκριμμένα, ορίζοντας τις σχετικά ασθενώς mixing επεκτάσεις και τις συμπαγείς επεκτάσεις ενός δυναμικού συστήματος, αποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 8 το ακόλουθο: Αν ένα εργοδικό δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δεν είναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$, τότε υπάρχει ενδιάμεσος συμπαγής παράγοντας του $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Με την βοήθεια του διχοτομικού αυτού θεωρήματος, για κάθε δυναμικό σύστημα ορίζεται ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός η ως δείκτης και μια οικογένεια δυναμικών συστημάτων $\{(X, \mathcal{A}_\xi, \mu, \varphi) \mid \ \xi \leq \eta\}$, μέσω της οποίας αποδεικνύεται το Θεώρημα Furstenberg.

Κεφάλαιο 2

Προαπαιτούμενα

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Σύμβολα προτασιακού λογισμού:
$\neg$ άρνηση,
$\wedge$ σύζευξη,
$\vee$ διάζευξη,
$\Rightarrow$ συνεπαγωγή,
$\Leftrightarrow$ ισοδυναμία,
$\forall$ για κάθε,
$\exists$ υπάρχει,
$\in$ ανήκει.

Συμβολισμός. Με $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q} = \{k/l \mid k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, $\mathbb{R}$, και $\mathbb{C} = \{x + iy \mid \ x,\ y \in \mathbb{R}\}$ συμβολίζουμε τους φυσικούς, τους ακέραιους, τους ρητούς, τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς αντίστοιχα. Αν X είναι υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών με $0 \in X$, θέτουμε $X^* = X \setminus \{0\}$.

Για τα παρακάτω, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [36].

Ορισμός 2.1.1. *Δύο σύνολα A, B είναι* **ισοπληθικά** *αν υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί των στοιχείων τους. Συμβολικά*

$$A =_c B \Leftrightarrow_{o\rho} \quad (\exists\, f : A \to B)[f \ \ \text{1-1 και επί}].$$

Ορισμός 2.1.2. *Ένα σύνολο A είναι* **πεπερασμένο** *αν υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε*

$$A =_c \{i \in \mathbb{N} \mid \ i < n\} = \{0, ..., n-1\},$$

αλλιώς το A είναι **άπειρο**.

Το σύνολο A είναι **αριθμήσιμο** *αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, αλλιώς είναι* **υπεραριθμήσιμο**.

Παρατήρηση 2.1.3. *Το κενό σύνολο, $\emptyset$, είναι πεπερασμένο, αφού* $\emptyset = \{i \in \mathbb{N} \mid \ i < 0\}$.

Ορισμός 2.1.4. *Το* **δυναμοσύνολο** *$\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A, δηλαδή*

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid \ X \ \text{ είναι σύνολο και } \ X \subseteq A\}.$$

Ορισμός 2.1.5. *Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα σύνολο P είναι* **μερική διάταξη** *αν για κάθε x, y και z στο P ισχύουν:*
i) $x \leq x$ *(***αυτοπάθεια***)*,
ii) $x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \Rightarrow \ x \leq z$ *(***μεταβατικότητα***)*,
iii) $x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \Rightarrow \ x = y$ *(***αντισυμμετρικότητα***)*.

Η $\leq$ είναι **ολική** *αν επιπλέον όλα τα στοιχεία του P είναι* **συγκρίσιμα** *ανά δύο ως προς την $\leq$, δηλαδή συμβολικά:*

$$(\forall\, x,\ y \in P)[x \leq y \ \vee \ y \leq x]$$

$$\text{ή ισοδύναμα, } \ (\forall\, x,\ y \in P)[x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x].$$

Ορισμός 2.1.6. *Η διμελής σχέση $\leq$ είναι* **καλή διάταξη** *του συνόλου P, αν είναι ολική διάταξη του P και επιπλέον κάθε μη κενό υποσύνολο του P έχει ελάχιστο στοιχείο, συμβολικά:*

$$(\forall\, X \subseteq P)[X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists\, x \in X)(\forall\, y \in X)[x \leq y]].$$

Ορισμός 2.1.7. **Δομημένο σύνολο** *καλείται ένα ζεύγος $U = (A, \mathcal{S})$, όπου $A = Field(U)$ είναι σύνολο, το* **πεδίο** *του U, και $\mathcal{S}$ είναι τυχόν αντικείμενο, ο* **σκελετός** *του U.*

Ορισμός 2.1.8. **Μερικά διατεταγμένος χώρος** *(αντίστοιχα* **καλά διατεταγμένος χώρος***) είναι ένα δομημένο σύνολο $U = (Field(U), \leq_U)$, όπου η $\leq_U$ είναι μερική διάταξη (αντίστοιχα καλή διάταξη) του $Field(U)$.*

Ορισμός 2.1.9. *Έστω P μερικά διατεταγμένος χώρος, $S \subseteq P$ και $M \in P$ στοιχείο του P. Το M είναι:*
i) **άνω φράγμα** *του S, αν είναι μεγαλύτερο-ίσο κάθε μέλους του S, δηλαδή*

$$x \in S \Rightarrow x \leq M, \ (x \in P).$$

ii) **μέγιστο** *του S αν είναι άνω φράγμα και μέλος του S, δηλαδή*

$$M \in S \ \wedge \ (\forall\, x \in S)[x \leq M].$$

iii) **ελάχιστο άνω φράγμα** *του S, αν είναι άνω φράγμα και μικρότερο-ίσο κάθε άνω φράγματος του S, δηλαδή*

$$(\forall\, x \in S)[x \leq M] \ \wedge \ (\forall\, M')[(\forall\, x \in S)[x \leq M'] \Rightarrow M \leq M'].$$

Ορισμός 2.1.10. *Ένα υποσύνολο $S \subseteq P$ μερικά διατεταγμένου χώρου P είναι* **αλυσίδα** *αν τα μέλη του S είναι συγκρίσιμα ανά δύο, δηλαδή*

$$(\forall\, x,\ y \in S)[x \leq y \ \vee \ y \leq x].$$

Θεώρημα 2.1.11 (Υπερπεπερασμένης Επαγωγής). *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U και κάθε μονομελή οριστική συνθήκη P,*

$$(\forall\, y \in U)[(\forall\, x < y)P(x) \Rightarrow P(y)] \Rightarrow (\forall\, y \in U)P(y).$$

Ορισμός 2.1.12. Επόμενα και οριακά σημεία. *Κάθε καλά διατεταγμένος χώρος U αν δεν είναι κενός, έχει ελάχιστο στοιχείο που συμβολίζεται με $0 = 0_U$. Εκτός από το μέγιστο στοιχείο του U (αν τέτοιο υπάρχει), κάθε $x \in U$ έχει ένα αμέσως επόμενο σημείο, το*

$$S(x) = S_U(x) := \inf_U \{y \in U \mid \ x < y\}.$$

Οι τιμές της μερικής συνάρτησης $S : U \to U$ είναι τα **επόμενα σημεία** *του U. Επιπλέον, ο U μπορεί να έχει* **οριακά σημεία** *που είναι μεγαλύτερα του 0 αλλά όχι επόμενα, δηλαδή*

$$Limit_U(x) \Leftrightarrow x \in Limit_U \Leftrightarrow_{o\rho} \ \ 0 < x \ \wedge \ (\forall\, u < x)(\exists\, v)[u < v < x].$$

Το πρώτο οριακό σημείο του U (αν τέτοιο υπάρχει) συμβολίζεται με

$$\omega = \omega_U := \inf\{x \in U \mid \ Limit(x)\}.$$

Τα σημεία πριν απο το ω είναι τα **πεπερασμένα** *σημεία του U και τα σημεία που έπονται του ω (μαζί με το ω) είναι τα* **άπειρα** *σημεία του U.*

Ορισμός 2.1.13. *Ο καλά διατεταγμένος χώρος U είναι* **αρχικό τμήμα** *του καλά διατεταγμένου V, αν το πεδίο Field(U) είναι κλειστό προς τα κάτω υποσύνολο του Field(V) και η διάταξη $\leq_U$ είναι ο περιορισμός της διάταξης $\leq_V$ στο Field(U), δηλαδή:*

$$Field(U) \subseteq Field(V) \ \wedge \ (\forall\, x,\ y \in Field(U))[x \leq_U y \Leftrightarrow x \leq_V y] \ \wedge$$

$$\wedge \ (\forall\, y \in Field(U))(\forall\, x \leq_V y)[x \in Field(U)] \ \Leftrightarrow_{o\rho} \ U \sqsubseteq V.$$

Σε κάθε $x \in V$ αντιστοιχίζουμε το **γνήσιο αρχικό τμήμα** *των σημείων αυστηρά κάτω του x,*

$$seg(y) = seg_V(y) := \{x \in V \mid \ x <_V y\}.$$

Ορισμός 2.1.14. *Μια συνάρτηση π: $P \to Q$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο σε έναν άλλο* **σέβεται τις διατάξεις** *αν για κάθε $x,\ y \in P$,*

$$x \leq_P y \Leftrightarrow \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

Ομοιότητα *από το P στο Q είναι μία συνάρτηση π: $P \to Q$ 1-1 και επί, που σέβεται τις διατάξεις. Αν υπάρχει τέτοια ομοιότητα, καλούμε τους P και Q* **όμοιους**. *Συμβολικά γράφουμε*

$$P =_\circ Q \ \Leftrightarrow_{o\rho} \ (\exists\, \pi : P \to Q \ \text{ 1-1 και επί })[\eta\ \pi \text{ είναι ομοιότητα}].$$

Ορισμός 2.1.15. **Αρχική ομοιότητα** *π: $U \to \pi(U) \sqsubseteq V$, όπου π 1-1, ενός καλά διατεταγμένου χώρου σε κάποιον άλλο είναι μια οποιαδήποτε ομοιότητα του U με κάποιο αρχικό τμήμα του V. Αν υπάρχει τέτοια αρχική ομοιότητα, καλούμε τον U* **μικρότερο-ίσο σε μήκος** *του V, συμβολικά:*

$$U \leq_\circ V \Leftrightarrow_{o\rho} \ (\exists\, I \sqsubseteq V)[U =_\circ I].$$

Επίσης γράφουμε,

$$U <_\circ V \Leftrightarrow_{o\rho} \ U \leq_\circ V \ \wedge \ U \neq_\circ V \Leftrightarrow (\exists\, x \in V)[U =_\circ seg_V(x)].$$

Θεώρημα 2.1.16. *Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*
i) **Το Αξίωμα Επιλογής(AC)**: *Για κάθε διμελή σχέση $P \subseteq (A \times B)$ σε σύνολα A, B,*

$$(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in B)[xPy] \Rightarrow (\exists\, f : A \to B)(\forall\, x \in A)[xPf(x)].$$

ii) **Το Λήμμα του Zorn**: *Αν κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα σε κάποιο μερικά διατεταγμένο χώρο P, τότε ο P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*
iii) **Το Θεώρημα Καλής Διάταξης**: *Κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο (επιδέχεται καλή διάταξη).*

Ορισμός 2.1.17. Διατακτικοί Αριθμοί . *Ο* **von Neumann επιμορφισμός** *(δηλαδή συνάρτηση επί) ενός καλά διατεταγμένου χώρου U είναι ο μοναδικός επιμορφισμός $\mathbf{v}{=}\mathbf{v}_U : U \to \mathbf{v}_U(U)$ που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$\mathbf{v}(y) = \{\mathbf{v}(x) \mid x < y\} = \mathbf{v}(seg(y)), \quad (y \in U).$$

Ο **διατακτικός αριθμός** *του U είναι η εικόνα $ord(U) := \mathbf{v}_U(U)$, του U από τον von Neumann επιμορφισμό του. Επίσης θέτουμε:*

$$ON(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in ON \Leftrightarrow_{op} \ (\exists \text{ καλά διατεταγμένος χώρος } U)[\alpha = ord(U)].$$

Πρόταση 2.1.18. Πρώτη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών . *Αν π είναι αρχική ομοιότητα από τον καλά διατεταγμένο U στον καλά διατεταγμένο V, τότε*

$$\mathbf{v}_V(\pi(y)) = \mathbf{v}_U(y), \quad (y \in U).$$

Πρόταση 2.1.19. Δεύτερη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών . *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U και κάθε $y \in U$,*

$$\mathbf{v}_U(y) = ord(seg_U(y)).$$

Παρατήρηση 2.1.20. *Από το προηγούμενο έχουμε ότι κάθε μέλος διατακτικού αριθμού είναι διατακτικός αριθμός και κάθε διατακτικός αριθμός είναι μέλος διατακτικού αριθμού.*

Πρόταση 2.1.21. Τρίτη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών . *Κάθε διατακτικός αριθμός α είναι καλά διατεταγμένος από τη σχέση*

$$u \leq_\alpha v \Leftrightarrow_{op} \ u = v \ \vee \ u \in v, \quad (u, v \in \alpha),$$

και αν $\alpha = ord(U)$ για κάποιο χώρο U, τότε ο von Neumann επιμορφισμός $\mathbf{v} : U \to \alpha$ είναι ομοιότητα.

Πρόταση 2.1.22. Η διάταξη των διατακτικών αριθμών .
1) *Η κλάση ON των διατακτικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένη από τη συνθήκη $\alpha \leq \beta$, με την εξής αυστηρή έννοια:*
i) $\alpha \leq \alpha$,
ii) $\alpha \leq \beta \ \wedge \ \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$,

iii) $\alpha \leq \beta \ \wedge \ \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$,
iv) $\alpha < \beta \ \vee \ \alpha = \beta \ \vee \ \beta < \alpha$,
και για κάθε οριστική συνθήκη P,

$$(\exists\, \alpha \in ON)P(\alpha) \Rightarrow (\exists\, \alpha \in ON)[P(\alpha) \ \wedge \ (\forall\, \beta < \alpha)\neg P(\beta)].$$

Ειδικότερα, δεν υπάρχει άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα διατακτικών αριθμών, δηλαδή

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})[\alpha_n \geq \alpha_{n+1}] \Rightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})[\alpha_n = \alpha_{n+1}].$$

Όταν $(\exists\, \alpha \in ON)P(\alpha)$, *θέτουμε*

$$(\mu\alpha \in ON)P(\alpha) = \inf\{\alpha \in ON \mid \ P(\alpha)\}.$$

2) *Για κάθε διατακτικό αριθμό, υπάρχει ο επόμενος*

$$S(\alpha) := (\mu\beta \in ON)[\alpha < \beta] = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

3) *Κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών* A *έχει ελάχιστο άνω φράγμα,*

$$\sup A := (\mu\beta \in ON)(\forall\, \alpha \in A)[\alpha \leq \beta] = \bigcup A,$$

που είναι το μέγιστο του A, *αν το* A *έχει μέγιστο, και το 0 αν* $A = \emptyset$.

Ορισμός 2.1.23. *Οι* **επόμενοι διατακτικοί αριθμοί** *είναι της μορφής* $S(\alpha)$ *και οι* **οριακοί διατακτικοί αριθμοί** *είναι αυτοί που δεν είναι επόμενοι ή το 0, αυτοί δηλαδή που χαρακτηρίζονται από την*

$$Limit(\lambda) \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \ \wedge \ \lambda = \sup\{\alpha \mid \ \alpha < \lambda\}.$$

Πρόταση 2.1.24 (Επαγωγή στην κλάση ON)**.** *Για κάθε μονομελή οριστική συνθήκη* P,

$$(\forall\, \alpha)[(\forall\, \xi < \alpha)P(\xi) \Rightarrow P(\alpha)] \Rightarrow (\forall\, \alpha)P(\alpha).$$

Παρατήρηση 2.1.25. *Το αντικείμενο* $\omega = \mathbf{v}_U(\omega_U)$ *που αντιστοιχίζεται στο πρώτο οριακό σημείο κάθε χώρου* U *(με οριακά σημεία) από τον von Neumann επιμορφισμό του* U *είναι το σύνολο*

$$\omega = \bigcap\{X \mid \ \emptyset \in X \ \wedge \ (\forall\, \alpha \in X)[\alpha \cup \{\alpha\} \in X]\}.$$

Έχουμε ήδη αναφερθεί στον $\omega = ord(\mathbb{N})$, τον διατακτικό αριθμό της αριθμοσειράς, που χαρακτηρίζεται από την σχέση

$$\omega = \bigcap \{X \mid \emptyset \in X \ \wedge \ (\forall\, \alpha \in X)[\alpha \cup \{\alpha\} \in X]\}.$$

Οι διατακτικοί αριθμοί που τον ακολουθούν αμέσως είναι οι

$$\omega + 1 = S(\omega),\ \omega + 2 = S(\omega + 1),\ \omega + 3 = S(\omega + 2), ...$$

και μετά από αυτούς έρχεται ο

$$\omega + \omega = sup\{\omega + n \mid \ n \in \omega\} = \omega \cdot 2$$

ο οποίος είναι ο δεύτερος οριακός, ο πρώτος μετά τον ω. Κάθε $\omega{\cdot}n$ κατασκευάζεται με την άθροιση του ω με τον εαυτό του n φορές. Αμέσως μετά έρχεται ο

$$\omega^2 = \sup\{\omega \cdot n \mid \ n < \omega\},$$

αργότερα ο $\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega$, ο ω^ω, ο ω^{ω^ω} κ.λπ.

Ορισμός 2.1.26. *Έστω ξ διατακτικός αριθμός. Θα λέμε ότι ο ξ είναι* **πληθάριθμος**, *αν για κάθε διατακτικό αριθμό ζ, $\zeta < \xi$ δεν υπάρχει μονομορφισμός (δηλαδή 1-1 συνάρτηση) από τον ξ στον ζ.*

Παρατήρηση 2.1.27. *Οι πεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί και ο ω είναι πληθάριθμοι .*

Ορισμός 2.1.28. *Ο επόμενος πληθάριθμος του ω συμβολίζεται με ω_1.*

Παρατήρηση 2.1.29. *Ο ω_1 είναι ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός και $\omega_1 = \bigcup\{\alpha \mid \ \alpha$ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός$\}$.*

2.2 Στοιχεία Πραγματικής Ανάλυσης

Για τα ακόλουθα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [38].

Ορισμός 2.2.1. *Ένας* **μετρικός χώρος** *(X, d) είναι ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, η οποία καλείται* **μετρική**, *που ικανοποιεί*
i) $d(x, y) \geq 0$ *για κάθε* $x,\ y \in X$,
ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *για κάθε* $x,\ y \in X$, *και*
iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *για κάθε* $x,\ y,\ z \in X$.

Ορισμός 2.2.2. *Αν E είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), μια* **νόρμα** *στον E είναι μια απεικόνιση $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}^+$ με τις ιδιότητες*
i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \;\; x, \; y \in E$ (**τριγωνική ανισότητα**),
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \;\; x \in E, \; \lambda \in \mathbb{K}$, *και*
iii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Παρατήρηση 2.2.3. *Ένας χώρος με νόρμα γίνεται μετρικός χώρος αν εφοδιαστεί με την απόσταση (μετρική) $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Ορισμός 2.2.4. *Μια* **ακολουθία** *πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ με $f(n) = \alpha_n$. Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε με $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Αντίστοιχα, μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι της μορφής $\alpha_n = Re(\alpha_n) + iIm(\alpha_n), \; n \in \mathbb{N}^*$, όπου i η φανταστική μονάδα, $Re(\alpha_n)$ το πραγματικό μέρος και $Im(\alpha_n)$ το φανταστικό μέρος του γενικού όρου α_n της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.2.5. *Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον αριθμό α αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέμε ότι **συγκλίνει** *αν η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο αριθμό α.*

Την σύγκλιση της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον αριθμό α την συμβολίζουμε με $\alpha_n \to \alpha$ ή $\lim_n \alpha_n = \alpha$ καθώς $n \to \infty$.

Πρόταση 2.2.6 (μοναδικότητα του ορίου). *Αν η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, συγκλίνει, και ισχύουν: $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n \to \beta$ καθώς $n \to \infty$, τότε $\alpha = \beta$.*

Πρόταση 2.2.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη (δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\alpha_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$) .*

Πρόταση 2.2.8. *Έστω ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και αριθμός α ώστε $\lim_n \alpha_n = \alpha$, τότε*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha.$$

Ορισμός 2.2.9. *Μια ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *σε έναν μετρικό χώρο* (X, d) **συγκλίνει** *στο* $x \in X$ *αν* $\lim_n d(x_n, x) = 0$, *δηλαδή αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$.

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *λέγεται* **βασική ακολουθία** *(ή* **ακολουθία Cauchy***) αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *για κάθε* n, $m \geq n_0$.

Ορισμός 2.2.10. *Ένας μετρικός χώρος* (X, d) *λέγεται* **πλήρης** *αν κάθε βασική ακολουθία του* X *είναι συγκλίνουσα στο* X.

Ορισμός 2.2.11. *Ένα υποσύνολο* A *ενός μετρικού χώρου* (X, d) *λέγεται* **ανοικτό** *αν περιέχει μια περιοχή κάθε στοιχείου του, δηλαδή αν για κάθε* $\alpha \in A$ *υπάρχει* $\delta \equiv \delta(\alpha) > 0$ *ώστε αν* $d(\beta, \alpha) < \delta$ *τότε* $\beta \in A$.

Το A *λέγεται* **κλειστό** *αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό, ισοδύναμα αν για κάθε ακολουθία* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *στοιχείων του* A *που συγκλίνει, ισχύει* $\lim_n \alpha_n \in A$.

Η **κλειστή θήκη** $\overline{A}$ *του* A *είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του* X *που περιέχει το* A.

Το **εσωτερικό** A° *του* A *είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του* X *που περιέχεται στο* A.

Το A *λέγεται* **πυκνό** *στο* X *αν η κλειστή του θήκη είναι όλος ο* X, *δηλαδή αν για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *στοιχείων του* A *που συγκλίνει στο* x.

Ορισμός 2.2.12. *Ένας μετρικός χώρος* (X, d) *λέγεται* **διαχωρίσιμος** *αν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.*

Πρόταση 2.2.13 (αρχή κιβωτισμού). *Αν* $\mathbb{R} \supsetneq [\alpha_1, \beta_1] \supsetneq [\alpha_2, \beta_2] \supsetneq \ldots \supsetneq [\alpha_n, \beta_n] \supsetneq \ldots$, *τότε το σύνολο* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ *είναι μη κενό, και μάλιστα είναι μονοσύνολο αν* $\beta_n - \alpha_n \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Ορισμός 2.2.14. *Μια απεικόνιση* $f : X \to Y$ *μεταξύ μετρικών χώρων* (X, d) *και* (Y, p) *λέγεται* **συνεχής** *στο* $x \in X$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta \equiv \delta(x, \varepsilon) > 0$ *ώστε για κάθε* $y \in X$, *αν* $d(x, y) < \delta$ *τότε* $p(f(y), f(x)) < \varepsilon$. *Η* f *λέγεται* **συνεχής** *στον* X *αν είναι συνεχής σε κάθε* $x \in X$.

Η f *λέγεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ *ώστε για κάθε* x, $y \in X$ *με* $d(x, y) < \delta$, *τότε* $p(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

Θεώρημα 2.2.15. *Έστω* (X,d), (Y,p) *μετρικοί χώροι,* (Y,p) *πλήρης,* $D \subseteq X$ *πυκνό υποσύνολο και* $f : D \to Y$ *ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Τότε, η* f *μπορεί να επεκταθεί κατά μοναδικό τρόπο σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση* $\widetilde{f} : X \to Y$.

Πρόταση 2.2.16. *Μια απεικόνιση* $f : X \to Y$ *μεταξύ μετρικών χώρων* (X,d) *και* (Y,p) *είναι συνεχής στον* X *αν και μονο αν για κάθε ανοικτό* $U \subseteq Y$ *η αντίστροφη εικόνα* $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ *είναι ανοικτό στον* X.

Ορισμός 2.2.17. *Αν* X *είναι μη κενό σύνολο και* (Y,d) *μετρικός χώρος, μια ακολουθία* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συναρτήσεων* $f_n : X \to Y$ *συγκλίνει σε μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ **κατά σημείο** *αν για κάθε* $x \in X$ *και* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *ώστε* $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$.

Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στη συνάρτηση* $f : X \to Y$ **ομοιόμορφα** *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *και κάθε* $x \in X$ *να ισχύει* $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Ορισμός 2.2.18. *Ένα υποσύνολο* A *ενός μετρικού χώρου* (X,d) *λέγεται* **συμπαγές** *αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του* A *έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή για κάθε οικογένεια* $\{U_i \mid i \in I\}$ *ανοικτών υποσυνόλων του* X *με* $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, *υπάρχουν* $i_1, ..., i_n \in I$ *ώστε* $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

Ορισμός 2.2.19. *Ένα υποσύνολο* A *ενός μετρικού χώρου* (X,d) *λέγεται* **ολικά φραγμένο** *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$, *το* A *καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών μπαλών* $D(x_i,\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x,x_i) < \varepsilon\}$ *με κέντρα* x_i *στο* A *και ακτίνα* ε *(το σύνολο των κέντρων* x_i *καλείται και* **ε-πυκνό***).*

Ορισμός 2.2.20. *Μια οικογένεια* $\mathcal{F}$ *υποσυνόλων ένος μη κενού συνόλου* X *λέμε ότι έχει την ιδιότητα των* **πεπερασμένων τομών**, *αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της* $\mathcal{F}$ *έχει μη κενή τομή.*

Θεώρημα 2.2.21. *Αν* A *είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου* (X,d), *τα εξής είναι ισοδύναμα:*
i) Το A *είναι συμπαγές.*
ii) Το A *είναι* **ακολουθιακά συμπαγές** *(δηλαδή κάθε ακολουθία στοιχείων του* A *έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του* A*).*
iii) Το A *είναι* **αριθμήσιμα συμπαγές** *(δηλαδή κάθε αριθμήσιμο ανοικτό*

κάλυμμα του A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα).
iv) Το A είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.
v) Κάθε μη κενή οικογένεια κλειστών συνόλων στον υπόχωρο $(A, d|_A)$ με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, έχει μη κενή τομή.

Πρόταση 2.2.22. *Αν (X, d), (Y, p) είναι μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και $A \subseteq X$ συμπαγές, τότε η εικόνα του A μέσω της f, $f(A)$, είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Πρόταση 2.2.23. *Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα $x_1, ..., x_r \in K$ ώστε $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$, $1 \leq i,\ j \leq r$, $i \neq j$, όπου r μέγιστο με αυτή την ιδιότητα.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο K τέτοια ώστε $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \neq m$ αφού τότε, επειδή K συμπαγές άρα και ακολουθιακά συμπαγές (Θεώρημα 2.2.21.), θα υπήρχε $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in K$ ώστε $\|x_{k_n} - x\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, άρα $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy, άτοπο. Άρα αν υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο στοιχείων θα είναι πεπερασμένο.

Έστω $x_1 \in K$. Αν για όλα τα $x \in K \backslash \{x_1\}$ ισχύει $\|x - x_1\| < \varepsilon$, τότε $r = 1$. Αν υπάρχουν στοιχεία για τα οποία ισχύει το αντίθετο, επιλέγουμε ένα, έστω x_2, ώστε $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$. Αν υπάρχει $x_3 \in K \setminus \{x_1, x_2\}$ ώστε $\|x_1 - x_3\| \geq \varepsilon$, $\|x_2 - x_3\| \geq \varepsilon$ συνεχίζουμε την διαδικασία, η οποία (από πριν) σταματά σε πεπερασμένα βήματα, αλλιώς αν δεν υπάρχει τέτοιο x_3, έχουμε $r = 2$. Βρίσκουμε $x_1, ..., x_l \in K$ με $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$, $1 \leq i,\ j \leq l$, $i \neq j$. Για το $\varepsilon/2 > 0$, υπάρχουν $p_1, ..., p_{n_0} \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} D(p_i, \varepsilon/2)$. Τα προηγούμενα x_i ανήκουν σε διαφορετικές μπάλες της ανοικτής κάλυψης του K, άρα

$$sup\{l \in \mathbb{N} \mid\ x_1, ..., x_l \in K \ \text{ με } \ \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon,\ 1 \leq i,\ j \leq l,\ i \neq j\} \leq n_0 < \infty,$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. □

2.3 Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Για τα παρακάτω, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [35].

Ορισμός 2.3.1. *Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται* **άλγεβρα** *στο X αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*
i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) *αν* $A \in \mathcal{A}$, *τότε* $A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$, *και*
iii) *αν* $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *τότε* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. *(Δηλαδή, η* $\mathcal{A}$ *είναι μη κενή,* **κλειστή** *ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες τομές)*

Παρατήρηση 2.3.2. *Αν* $\mathcal{A}$ *άλγεβρα στο* X, *τότε η* $\mathcal{A}$ *είναι κλειστή ως προς συνολοθεωρητικές διαφορές και πεπερασμένες ενώσεις.*

Ορισμός 2.3.3. *Μια οικογένεια* $\mathcal{A}$ *υποσυνόλων ενός συνόλου* X *λέγεται* σ-**άλγεβρα** *στο* X *αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*
i) $X \in \mathcal{A}$,
ii) *αν* $A \in \mathcal{A}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{A}$, *και*
iii) *αν* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία υποσυνόλων του* X *με* $A_n \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$, *τότε* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.3.4. *Κάθε* σ-*άλγεβρα σε ένα σύνολο* X *είναι και άλγεβρα.*
Όπως και στην περίπτωση της άλγεβρας, κάθε σ-*άλγεβρα είναι κλειστή ως προς συνολοθεωρητικές διαφορές και αριθμήσιμες ενώσεις.*

Πρόταση 2.3.5. *Αν* $\mathcal{F}$ *είναι οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου* X, *τότε υπάρχει η ελάχιστη* σ-*άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *στο* X *που περιέχει την* $\mathcal{F}$.

Ορισμός 2.3.6. *Αν* X, $\mathcal{F}$ *και* $\mathcal{A}$ *όπως πριν, λέμε ότι η* $\mathcal{A}$ *είναι* σ-*άλγεβρα που* **παράγεται** *από την* $\mathcal{F}$ *και την συμβολίζουμε με* $\sigma(\mathcal{F})$.

Ορισμός 2.3.7. *Έστω* (X, ρ) *μετρικός χώρος και* $\mathcal{T}$ *η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του* X. *Ένα υποσύνολο* B *του* X *λέγεται* **Borel** *αν* $B \in \sigma(\mathcal{T})$. *Συμβολίζουμε με* $\mathcal{B}(X)$ *τη* σ-*άλγεβρα των συνόλων Borel του* X.

Πρόταση 2.3.8. *Έστω* $\mathcal{F}$ *η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^k$.
Αν $\Delta_1 = \{\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \leq \beta_i,\ i = 1, ..., k\} \mid \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., k\}$,
$\Delta_2 = \{\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \alpha_i < x_i \leq \beta_i,\ i = 1, ..., k\} \mid \alpha_i < \beta_i,\ \alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., k\}$,
$\Delta_3 = \{\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \alpha_i < x_i < \beta_i,\ i = 1, ..., k\} \mid \alpha_i < \beta_i,\ \alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., k\}$,
τότε $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3)$.

Παρατήρηση 2.3.9. *Όμοια, αν* $\Delta = \{(0, y_1] \times ... \times (0, y_k],\ y_1, ..., y_k \in [0, 1)\}$, *τότε* $\mathcal{B}((0,1)^k) = \sigma(\Delta)$. *Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για κλειστά και ημίκλειστα διαστήματα του* $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.3.10. *Έστω* X *ένα μη κενό σύνολο και* $\mathcal{A}$ *μια* σ*-άλγεβρα στο* X. *Αν* Y *είναι ένα μη κενό υποσύνολο του* X, *τότε η οικογένεια* $\mathcal{A}|_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ *είναι* σ*-άλγεβρα στο* Y *(ο* **περιορισμός** *της* $\mathcal{A}$ *στο* Y*).*

Ορισμός 2.3.11. *Έστω* X *σύνολο και* $\mathcal{A}$ σ*-άλγεβρα στο* X. *Μια συνολοσυνάρτηση*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

λέγεται **μέτρο** *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*
i) $\mu(\emptyset) = 0$, *και*
ii) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, *αν* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της* $\mathcal{A}$.

Η ιδιότητα ii) του μέτρου μ *λέγεται* **αριθμήσιμη προσθετικότητα** *ή* σ-**προσθετικότητα**. *Το ζεύγος* $(X, \mathcal{A})$ *λέγεται* **μετρήσιμος χώρος** *και η τριάδα* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **χώρος μέτρου**. *Τα στοιχεία της* $\mathcal{A}$ *καλούνται* **μετρήσιμα σύνολα**.

Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε μέτρο δ_x ως εξής: $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Το δ_x λέγεται μέτρο **Dirac** στο σημείο x.

Πρόταση 2.3.12. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου. Αν* $A \subseteq B$ *στοιχεία της* $\mathcal{A}$, *τότε* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *(δηλαδή η* μ *είναι* **μονότονη** *συνολοσυνάρτηση). Αν επιπλέον* $\mu(A) < \infty$, *τότε* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Πρόταση 2.3.13. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου. Αν* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ακολουθία στοιχείων της* $\mathcal{A}$, *τότε*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$ *(δηλαδή η* μ *είναι* **αριθμήσιμα υποπροσθετική***).*

Ορισμός 2.3.14. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μ λέγεται*
i) **πεπερασμένο**, *αν $\mu(X) < \infty$,*
ii) **μέτρο πιθανότητας**, *αν $\mu(X) = 1$, και*
iii) σ-**πεπερασμένο**, *αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε n.*

Αντίστοιχα, ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου, χώρος μέτρου πιθανότητας ή χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Πρόταση 2.3.15. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές ώστε $\sigma(\Delta)$=$\mathcal{A}$ και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\mu(D) = \nu(D)$ για κάθε $D \in \Delta$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω δύο συνθήκες, τότε $\mu = \nu$ (δηλαδή $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$).*
i) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$.
ii) Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην Δ ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = X$ και $\mu(D_n) = \nu(D_n) < \infty$ για κάθε n.

Ορισμός 2.3.16. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $N \subseteq X$ λέγεται μ-***μηδενικό** *αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A) = 0$ και $N \subseteq A$.*

Ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **πλήρης** *χώρος μέτρου και το μ* **πλήρες** *μέτρο αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο N ανήκει στην $\mathcal{A}$ (και άρα $\mu(N) = 0$).*

Η **πλήρωση** *της $\mathcal{A}$ ως προς μ είναι η οικογένεια $\mathcal{A}_\mu$ όλων των $A \subseteq X$ με την ιδιότητα: υπάρχουν $E,\ F \in \mathcal{A}$ ώστε $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.*

$$\text{Ορίζουμε } \overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty] \text{ με } \overline{\mu}(A) = \mu(E), \text{ όπου } E \text{ όπως πριν.}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ ισχύει $\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E)$, άρα $\mu(E) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}$ και επομένως η συνολοσυνάρτηση $\overline{\mu}$ είναι καλά ορισμένη.

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$ λέγεται **πλήρωση** *του χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και το $\overline{\mu}$* **πλήρωση** *του μ. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_\mu$ λέγονται μ-***μετρήσιμα** *σύνολα.*

Πρόταση 2.3.17. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε:*
i) Η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A}_\mu \supseteq \mathcal{A}$.
ii) Το $\overline{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο και $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.
iii) Το $\overline{\mu}$ είναι το μοναδικό μέτρο που ορίζεται στην $\mathcal{A}_\mu$ ώστε $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.
iv) Το μ είναι πλήρες αν και μόνο αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ (και μ=$\overline{\mu}$).

Πρόταση 2.3.18. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $\mathcal{A}_0$ άλγεβρα στο X ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}_0$ ώστε $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$ (όπου $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ η συμμετρική διαφορά των A, B).*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } B \in \mathcal{A}_0 \text{ ώστε } \mu(A \triangle B) < \varepsilon\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{F}$ και ότι $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα. Τότε θα έχουμε το αποτέλεσμα, αφού θα είναι $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ και άρα $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ δηλαδή $\mathcal{F} = \mathcal{A}$.

Έστω $B \in \mathcal{A}_0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mu(B \triangle B) = 0 < \varepsilon$ άρα $B \in \mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{F}$.

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει το $\emptyset \in \mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0$ άλγεβρα) ώστε $\mu(\emptyset \triangle \emptyset) = 0 < \varepsilon$.

ii) Αν $A \in \mathcal{F}$ και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{A}_0$ ώστε $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Αλλά $\mathcal{A}_0$ άλγεβρα και άρα $B^c \in \mathcal{A}_0$ με

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = [B^c \cap (A^c)^c] \cup [A^c \cap (B^c)^c] = A^c \triangle B^c.$$

Τότε, υπάρχει $B^c \in \mathcal{A}_0$ με $\mu(A^c \triangle B^c) = \mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

iii) Αν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$, τότε για $\varepsilon > 0$ επειδή

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu(X) < \infty, \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } \mu(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n) < \varepsilon/2.$$

$A_1, ..., A_{n_0} \in \mathcal{F}$ άρα υπάρχουν $B_1, ..., B_{n_0} \in \mathcal{A}_0$ ώστε $\mu(A_i \triangle B_i) < \varepsilon/2n_0$, $i = 1, ..., n_0$. Τότε,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n) = \mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{n_0} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) \leq$$

$$\leq \mu(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n \cup (\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{n_0} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n)) \leq \mu(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n) +$$

$$+\mu(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \triangle B_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{n_0} \mu(A_n \triangle B_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα για το τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\bigcup_{n=1}^{n_0} B_n \in \mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0$ άλγεβρα) ώστε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n) < \varepsilon$ άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Από τα προηγούμενα έχουμε $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα και άρα το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 2.3.19. *Έστω X ένα σύνολο. Μια συνολοσυνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ λέγεται* **εξωτερικό μέτρο** *στο X αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*
i) $\varphi(\emptyset) = 0$,
*ii) αν $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $\varphi(A) \le \varphi(B)$ (**μονοτονία**), και*
*iii) αν $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ (**αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα** ή **σ-υποπροσθετικότητα**).*

Ορισμός 2.3.20. *Το* **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** *λ^* στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής: $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ με*

$$\lambda^*(A) = \{\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n) \mid \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\, \beta_n),\ \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{R},\ \alpha_n < \beta_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

για κάθε $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Πρόταση 2.3.21. *Το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και*

$$\lambda^*([\alpha, \beta]) = \lambda^*((\alpha, \beta]) = \lambda^*([\alpha, \beta)) = \lambda^*((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha,$$

για κάθε $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \le \beta$ και $\lambda^*(I) = \infty$ αν I μη φραγμένο διάστημα (δηλαδή το εξωτερικό μέτρο Lebesgue κάθε διαστήματος είναι το μήκος του).

Ορισμός 2.3.22. *Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Ένα σύνολο $B \subseteq X$ λέγεται* **φ-μετρήσιμο** *αν*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B)$$

για κάθε $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_\varphi$ την οικογένεια όλων των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Θεώρημα 2.3.23 (Καραθεοδωρή)**.** *Έστω φ ένα εξωτερικό μέτρο στο X. Τότε η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι πλήρες μέτρο.*

Θεώρημα 2.3.24. *Κάθε σύνολο Borel του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$.*

Ορισμός 2.3.25. *Ο περιορισμός του λ^* στην $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ συμβολίζεται με λ και λέγεται* **μέτρο Lebesgue** *του $\mathbb{R}$.*

Πρόταση 2.3.26. *Το μέτρο Lebesgue στον* $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ *είναι η πλήρωση του μέτρου Lebesgue στον* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Ορισμός 2.3.27. *Έστω* X *μετρικός χώρος,* $\mathcal{A}$ σ*-άλγεβρα στο* X *ώστε* $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}(X)$ *και* μ *μέτρο στον* $(X, \mathcal{A})$*. Το* μ *λέγεται* **κανονικό**, *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*
i) $\mu(K) < \infty$ *για κάθε* $K \subseteq X$ *συμπαγές,*
ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U$ *ανοικτό στο* $X,\ A \subseteq U\}$ *για κάθε* $A \in \mathcal{A}$*, και*
iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K$ *συμπαγές στο* $X,\ K \subseteq U\}$ *για κάθε* U *ανοικτό υποσύνολο του* X.

Η ιδιότητα ii) του μ *λέγεται* **εξωτερική κανονικότητα** *και η iii)* **εσωτερική κανονικότητα**.

Πρόταση 2.3.28. *Το μέτρο Lebesgue* λ *στο* $\mathbb{R}$ *είναι κανονικό.*

Θεώρημα 2.3.29. *Αν* X *μετρικός χώρος, διαχωρίσιμος και πλήρης, τότε κάθε μέτρο Borel* μ *στο* X *είναι κανονικό.*

Ορισμός 2.3.30. *Έστω* $(X, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *λέγεται* $\mathcal{A}$-**μετρήσιμη** *(ή απλώς* **μετρήσιμη***), αν για κάθε* $\beta \in \mathbb{R}$ *το* $[f \leq \beta] := f^{-1}([-\infty, \beta])$ *είναι μετρήσιμο, δηλαδή ανήκει στην* $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.3.31. *Έστω* $(X, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* $B \subseteq X$*. Τότε* $B \in \mathcal{A}$ *αν και μόνον αν η χαρακτηριστική συνάρτηση του* B, X_B, *είναι* $\mathcal{A}$-*μετρήσιμη.*
(Όπου $X_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases}$ *.)*

Ορισμός 2.3.32. *Έστω* $(X, \mathcal{A})$ *και* $(Y, \mathcal{B})$ *μετρήσιμοι χώροι. Μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *λέγεται* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-**μετρήσιμη** *αν* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$.

Πρόταση 2.3.33. *Έστω* $(X, \mathcal{A})$ *και* $(Y, \mathcal{B})$ *μετρήσιμοι χώροι και* $f : X \to Y$ *συνάρτηση. Τότε*
i) η $\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *είναι* σ*-άλγεβρα στο* Y*, και*
ii) αν $\mathcal{C}$ *οικογένεια υποσυνόλων του* Y *ώστε* $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$*, τότε η* f *είναι* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*μετρήσιμη αν και μόνον αν* $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{A}$.

Ορισμός 2.3.34. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται* **απλή** *αν το σύνολο $s(X)$ τιμών της s είναι πεπερασμένο.*

Αν η s είναι απλή συνάρτηση, τότε υπάρχει μοναδική πεπερασμένη μετρήσιμη διαμέριση $\{A_1, ..., A_n\}$ του X (δηλαδή $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ και τα A_i είναι ξένα ανά δύο) με $A_i \neq \emptyset$ και μοναδικοί $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ με $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$ ώστε

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i}.$$

Η παράσταση αυτή λέγεται **κανονική μορφή** *της s (και προκύπτει αν γράψουμε $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, όπου $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$, και θέσουμε $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, $i = 1, ..., n$).*

Πρόταση 2.3.35. *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ($s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$) ώστε κάθε $s_n : X \to [0, +\infty)$ είναι απλή και $f = \lim_n s_n$. Αν η f είναι φραγμένη, τότε η $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Πόρισμα 2.3.36. *Έστω $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $f = \lim_n s_n$ με $\{|s_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα. Αν η f είναι φραγμένη η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

Ορισμός 2.3.37. *Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται* **$\mathcal{A}$-μετρήσιμη** *αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε σύνολο $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.*

Ορισμός 2.3.38. *Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{C}$ λέγεται* **απλή** *αν το σύνολο $s(X)$ τιμών της s είναι πεπερασμένο.*

Παρατήρηση 2.3.39. *Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{C}$ είναι απλή αν και μόνον αν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της s είναι απλές συναρτήσεις.*

Πρόταση 2.3.40. *Έστω $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία $s_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ απλών συναρτήσεων ώστε $f = \lim_n s_n$. Αν η f είναι φραγμένη, τότε η $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Στα παρακάτω, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου.

Ορισμός 2.3.41. *Έστω $f : X \to [0, +\infty)$ απλή συνάρτηση. Αν η f σε κανονική μορφή γράφεται*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i},$$

το **ολοκλήρωμα** *(Lebesgue) της f (ως προς μ) ορίζεται να είναι ο αριθμός $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$ και συμβολίζεται με $\int f d\mu$. Αν στο προηγούμενο άθροισμα εμφανίζεται ο όρος $0 \cdot \infty$, θέτουμε $0 \cdot \infty = 0$. Έχουμε $\int f d\mu \in [0, +\infty]$.*

Ορισμός 2.3.42. *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το* **ολοκλήρωμα** *(Lebesgue) της f (ως προς μ) ορίζεται ως εξής:*

$$\int f d\mu = \sup\{\int s d\mu \mid \ s \ \text{απλή}, \ 0 \leq s \leq f\}.$$

Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε το **ολοκλήρωμα** *(Lebesgue) της f (ως προς μ) στο A ορίζεται ως εξής:*

$$\int_A f d\mu = \int f X_A d\mu, \ \ \text{άρα} \ \ \int_A f d\mu \in [0, +\infty].$$

Θεώρημα 2.3.43 (Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue)**.** *Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}^*$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσα. Θέτουμε $f = \lim_n f_n$. Τότε,*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα 2.3.44 (Λήμμα Fatou)**.** *Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}^*$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Ορισμός 2.3.45. *Έστω μ, ν δύο μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Αν ισχύει η συνθήκη: για $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$, λέμε ότι το ν είναι* **απόλυτα συνεχές** *ως προς μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$.*

Ορισμός 2.3.46. *Μια ιδιότητα P των σημείων του X λέμε ότι ισχύει μ-* **σχεδόν παντού** *(στο X), αν το σύνολο $\{x \in X \mid \text{ το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\}$ είναι μ-μηδενικό. Για συντομογραφία γράφουμε $\mu - \sigma.\pi.$ αντί για μ-σχεδόν παντού.*

Ορισμός 2.3.47. *Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται (***Lebesgue***)* **ολοκληρώσιμη** *(ως προς μ) αν $\int |f| d\mu < \infty$.*

Αν η $f : X \to \mathbb{C}$, $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$ (όπου i η φανταστική μονάδα, $u^+ = \max\{u, 0\}$ και $u^- = -\min\{u, 0\} = \max\{-u, 0\}$) είναι ολοκληρώσιμη, τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ το **ολοκλήρωμα** *(Lebesgue) της f (ως προς μ) στο A ορίζεται ως εξής:*

$$\int_A f d\mu = \int_A u^+ d\mu - \int_A u^- d\mu + i \int_A v^+ d\mu - i \int_A v^- d\mu \in \mathbb{C}.$$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ άρα από πριν, μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν $\int |f| d\mu < \infty$ και το ολοκλήρωμα της f σε ένα $A \in \mathcal{A}$ δίνεται από

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Συμβολίζουμε με $L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ το σύνολο των πραγματικών ολοκληρώσιμων ως προς μ συναρτήσεων και με $L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ το σύνολο των μιγαδικών ολοκληρώσιμων ως προς μ συναρτήσεων.

Πρόταση 2.3.48. *Έστω $f,\ g \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$.*
i) Αν $f = g\ \mu - \sigma.\pi.$ τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$.
ii) $f = 0\ \mu - \sigma.\pi.$ αν και μόνον αν $\int_A f d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 2.3.49 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue)**.** *Έστω $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f $\mu - \sigma.\pi.$ Έστω ότι υπάρχει $g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ-σ.π. για $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε $f,\ f_n \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}^*$ και ισχύουν:*

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0, \quad \text{και} \quad \lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Οι συναρτήσεις που αναφέρονται παρακάτω είναι ορισμένες στο X και παίρνουν τιμές πραγματικές ή μιγαδικές.

Ορισμός 2.3.50. *Έστω* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* f *μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η ακολουθία* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στην* f*:*
i) μ-**σχεδόν παντού**, *αν το σύνολο* $\{x \in X \mid$ *δεν ισχύει* $\lim_n f_n(x) = f(x)\}$ *είναι* μ-*μηδενικό.*
ii) **κατά μέτρο**, *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ $\lim_n \mu([|f_n - f| \geq \varepsilon]) = 0$.
iii) **σχεδόν ομοιόμορφα**, *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(B) < \varepsilon$ *ώστε* f_n *να συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f *στο* $X \setminus B$.

Γράφουμε, αντίστοιχα, $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ *ή* $f_n \to f$ *κατά μέτρο ή* $f_n \to f$ *σχεδόν ομοιόμορφα.*

Πρόταση 2.3.51 (Lebesgue)**.** *Έστω* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* f *μετρήσιμη συνάρτηση ώστε* $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ *Αν το* μ *είναι πεπερασμένο, τότε* $f_n \to f$ *κατά μέτρο.*

Θεώρημα 2.3.52 (Egoroff)**.** *Έστω* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* f *μετρήσιμη συνάρτηση ώστε* $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ *Αν το* μ *είναι πεπερασμένο, τότε* $f_n \to f$ *σχεδόν ομοιόμορφα.*

Πρόταση 2.3.53. *Έστω* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* f *μετρήσιμη συνάρτηση ώστε* $f_n \to f$ *σχεδόν ομοιόμορφα. Τότε* $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ *και κατά μέτρο.*

Ορισμός 2.3.54. *Μια ακολουθία* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μετρήσιμων συναρτήσεων λέγεται* **βασική κατά μέτρο**, *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και* $\delta > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}^*$ *ώστε*

$$\text{για } n,\ m \geq n_0 \text{ ισχύει } \mu([|f_n - f| \geq \varepsilon]) < \delta.$$

Παρατήρηση 2.3.55. *Αν* $f_n \to f$ *κατά μέτρο, τότε η* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι βασική κατά μέτρο.*

Θεώρημα 2.3.56 (Riesz)**.** *Έστω* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *βασική κατά μέτρο ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο* X. *Τότε υπάρχει μια μοναδική* $\mu - \sigma.\pi.$ *μετρήσιμη συνάρτηση* f *ώστε* $f_n \to f$ *κατά μέτρο. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία* $\{f_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *της* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ώστε* $f_{k_n} \to f$ *σχεδόν ομοιόμορφα (άρα και κατά μέτρο).*

Ορισμός 2.3.57. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι. Ένα $R \subseteq X \times Y$ λέγεται* **μετρήσιμο ορθογώνιο** *(του $X \times Y$), αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται σ-***άλγεβρα γινόμενο** *των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και συμβολίζεται με $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Πρόταση 2.3.58. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι. Αν f είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο $X \times Y$, τότε η f_x είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη για κάθε $x \in X$ και η f^y $\mathcal{A}$-μετρήσιμη για κάθε $y \in Y$, όπου οι συναρτήσεις f_x και f^y στο Y και X, αντίστοιχα, δίνονται από*

$$f_x(y) = f(x, y), \quad \textit{και} \quad f^y(x) = f(x, y).$$

Θεώρημα 2.3.59 (Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενου)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο ρ στον $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ώστε*

$$\rho(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \textit{για κάθε} \quad A \in \mathcal{A} \quad \textit{και} \quad B \in \mathcal{B}$$

(όπου, όπως συνήθως, θέτουμε $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

Το ρ καλείται **μέτρο γινόμενο** *των μ και ν και συμβολίζεται με $\mu \times \nu$. Επίσης, ο χώρος μέτρου $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ λέγεται* **χώρος γινόμενο** *των $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.*

Θεώρημα 2.3.60 (Tonelli)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για κάθε $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση ισχύει*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Πόρισμα 2.3.61. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*
i) $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$.
ii) $\int \int |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty$.
iii) $\int \int |f(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) < \infty$.

Θεώρημα 2.3.62 (Fubini). *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f : X\times Y\to\mathbb{C}$, $f\in L^1_{\mathbb{C}}(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\times\nu)$. Τότε*
i) $f_x\in L^1_{\mathbb{C}}(Y,\mathcal{B},\nu)$ *μ-σχεδόν για κάθε* $x\in X$ *και* $f^y\in L^1_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$ *ν-σχεδόν για κάθε* $y\in Y$, *και*

ii) $$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)=\int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y),$$

όπου θέτουμε $\int_Y f(x,y)d\nu(y)=0$ *αν* $f_x\notin L^1_{\mathbb{C}}(Y,\mathcal{B},\nu)$ *και* $\int_X f(x,y)d\mu(x)=0$ *αν* $f^y\notin L^1_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$.

Θεώρημα 2.3.63 (Radon-Nikodym). *Έστω μ και ν μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{A})$ ώστε μ είναι σ-πεπερασμένο και $\nu\ll\mu$. Τότε υπάρχει μια μοναδική $\mu-$σ.π. μετρήσιμη συνάρτηση $f : X\to[0,+\infty]$ ώστε*

$$\nu(A)=\int_A fd\mu \;\; \text{για κάθε} \;\; A\in\mathcal{A}.$$

Επιπλέον, αν το ν είναι σ-πεπερασμένο η f παίρνει πραγματικές τιμές και αν το ν είναι πεπερασμένο $f\in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$.

Ορισμός 2.3.64. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A}\to\mathbb{R}$ λέγεται* **προσημασμένο μέτρο** *στον $(X,\mathcal{A})$, αν*
i) $\mu(\emptyset)=0$, *και*
ii) $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)$ *για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$.*

Ορισμός 2.3.65. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A}\to\mathbb{C}$ λέγεται* **μιγαδικό μέτρο** *στον $(X,\mathcal{A})$, αν*
i) $\mu(\emptyset)=0$, *και*
ii) $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)$ *για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$.*

Η **κύμανση** *του μιγαδικού μέτρου μ είναι η συνολοσυνάρτηση $|\mu| : \mathcal{A}\to[0,+\infty]$ με*

$$|\mu|(A)=\sup\{\sum_{k=1}^m|\mu(B_k)| \mid m\in\mathbb{N}^*,\{B_1,...,B_m\} \text{ μετρήσιμη διαμέριση του } A\}$$

για κάθε $A\in\mathcal{A}$.

Πρόταση 2.3.66 (Ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz)**.** *Έστω f, g : $X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

$$\int fgd\mu \leq (\int f^2 d\mu)^{1/2} \cdot (\int g^2 d\mu)^{1/2}.$$

Ορισμός 2.3.67. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ (αντίστοιχα $f : X \to \mathbb{C}$) μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε*

$$\|f\|_p = (\int f^p d\mu)^{1/p}.$$

Επίσης ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \in [0,+\infty] \mid \mu([|f| > \alpha]) = 0\}.$$

Ο αριθμός $\|f\|_\infty$ λέγεται **ουσιώδες supremum** *της f και είναι καλά ορισμένος. Έχουμε $\|f\|_p \in [0,+\infty]$ για κάθε p με $1 \leq p \leq \infty$.*

Συμβολίζουμε με $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ (αντίστοιχα $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$), όπου $1 \leq p \leq \infty$, το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ (αντίστοιχα $f : X \to \mathbb{C}$),με ταύτιση των συναρτήσεων που ισούνται $\mu - \sigma.\pi.$, για τις οποίες ισχύει $\|f\|_p < \infty$. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$, συμβολίζουμε με $L^p_{\mathbb{R}}([\alpha,\beta])$ τον χώρο $L^p_{\mathbb{R}}([\alpha,\beta], \mathcal{M}_{\lambda^*}|_{[\alpha,\beta]}, \lambda|_{[\alpha,\beta]})$ (αντίστοιχα με $L^p_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta])$ τον χώρο $L^p_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta], \mathcal{M}_{\lambda^*}|_{[\alpha,\beta]}, \lambda|_{[\alpha,\beta]})$), όπου λ^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue και λ το μέτρο Lebesgue.

Πρόταση 2.3.68. *Αν $\mu(X) < \infty$, $1 \leq r < s \leq \infty$ και $f \in L^s_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$, τότε*

$$\|f\|_r \leq \begin{cases} \|f\|_s \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}, & \text{αν } s < \infty \\ \|f\|_s \mu(X)^{\frac{1}{r}}, & \text{αν } s = \infty \end{cases} \quad \text{και άρα } f \in L^r_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu).$$

Πρόταση 2.3.69. *Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Ορισμός 2.3.70. *Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f \in L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}^*$. Λέμε ότι η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* **συγκλίνει στην** *f* **στον** *$L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$ αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Γράφουμε $f_n \to f$ στον $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$.*

Πρόταση 2.3.71. *Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f \in L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $f_n \to f$ στον $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$ τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Πρόταση 2.3.72. *Το σύνολο των απλών συναρτήσεων στον $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$, όπου $1 \leq p \leq \infty$, είναι πυκνό υποσύνολο του $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$.*

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας. Με $\widetilde{\mathcal{A}}$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την σχέση $A \sim A' \Leftrightarrow \mu(A\triangle A') = 0$. Έστω $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα στοιχείο $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ με την χαρακτηριστική συνάρτηση $X_A \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$, όπου A ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $\widetilde{A}$, θεωρώντας την συνάρτηση

$$f : \widetilde{\mathcal{A}} \to L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu), \ \text{ όπου } \widetilde{A} \mapsto X_A.$$

Η f είναι 1-1 και επί του συνόλου των χαρακτηριστικών συναρτήσεων που ανήκουν στον $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Έτσι το $\widetilde{\mathcal{A}}$ γίνεται μετρικός χώρος με μετρική $d(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \mu(A\triangle B)$. Μάλιστα, επειδή $d(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \|X_A - X_B\|_1$, έχουμε ότι η f είναι ισομετρία και άρα το $\widetilde{\mathcal{A}}$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος διότι το $f(\widetilde{\mathcal{A}})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Πράγματι, αν $\{X_{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(\widetilde{\mathcal{A}})$ και $\|X_{A_n} - f\|_1 \to 0$ για κάποια $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$, τότε $X_{A_n} \to f$ κατά μέτρο και άρα υπάρχει υπακολουθία $\{X_{A_{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{X_{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $X_{A_{k_n}} \to g \ \ \mu - \sigma.\pi.$ Άρα $g(x) \in \{0,1\} \ \ \mu - \sigma.\pi.$ και επομένως $g = X_A$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$, $\mu - \sigma.\pi.$, δηλαδή $g = X_A = f(\widetilde{A}) \in f(\widetilde{\mathcal{A}})$. Άρα ο $(\widetilde{\mathcal{A}}, d)$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος, ισομετρικός με τον χώρο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων του $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ με την σχετική μετρική που επάγει η νόρμα $\|\cdot\|_1$.

Ορισμός 2.3.73. *Μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στον X λέγεται* **αριθμήσιμα παραγόμενη** *αν υπάρχει $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμο σύνολο ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$.*

Αν X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του X είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, αφού ο X έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία που παράγουν τα Borel υποσύνολά του.

Πρόταση 2.3.74. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας ώστε $\mathcal{A}$ αριθμήσιμα παραγόμενη. Τότε, $(\widetilde{\mathcal{A}}, d)$ διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*

Ορισμός 2.3.75. *Ο χώρος πεπερασμένου μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$ καλείται* **διαχωρίσιμος** *αν $(\widetilde{\mathcal{A}}, d)$ διαχωρίσιμος.*

Παρατήρηση 2.3.76. *Αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι ένας κανονικός χώρος μέτρου πιθανότητας, τότε είναι διαχωρίσιμος, αφού η $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.*

2.4 Στοιχεία Τοπολογίας και Συναρτησιακής Ανάλυσης

Για τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [37].

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Με $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, $D_X = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ και $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ συμβολίζουμε την κλειστή μπάλα, ανοικτή μπάλα και σφαίρα του X αντίστοιχα.

Ορισμός 2.4.1. *Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, που είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει η νόρμα, λέγεται χώρος* **Banach**.

Θεώρημα 2.4.2 (Riesz-Fisher). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, ο χώρος $L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Banach.*

Ορισμός 2.4.3. *Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα μη κενό υποσύνολο A του X λέγεται* **υπόχωρος** *του X, αν*
i) για κάθε $x,\ y \in A$ ισχύει $x + y \in A$, και
ii) για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και $x \in A$ ισχύει $\lambda x \in A$.

Ορισμός 2.4.4. *Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα* **εσωτερικό γινόμενο** *στον E είναι μια απεικόνιση*

$$< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{K} \ \text{ έτσι ώστε}$$

i) $< x,\ x > \geq 0$
ii) $< x,\ x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$
iii) $\overline{< x,\ y >} =< y,\ x >$ *(όπου $\overline{\alpha}$ ο μιγαδικός συζυγής του α)*
iv) $< x_1 + \lambda x_2,\ y >=< x_1,\ y > +\lambda < x_2,\ y >$
για κάθε $x,\ y,\ x_1,\ x_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ορισμός 2.4.5. *Δύο στοιχεία $x,\ y$ ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται* **κάθετα** *(συμβολικά $x \perp y$) όταν $< x,\ y >= 0$.*

Μια οικογένεια $\{e_i \mid i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική** *αν $< e_i,\ e_j >= \delta_{ij}$, όπου δ η συνάρτηση του Kronecker με $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$.*

Ορισμός 2.4.6. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο ενός χώρου H με εσωτερικό γινόμενο.*

$$\text{Ο χώρος } A^{\perp} = \{x \in H \mid < x, y >= 0 \ \text{ για κάθε } \ y \in A\}$$

καλείται **κάθετος υπόχωρος** *του A.*

Ορισμός 2.4.7. Γραμμική θήκη *του συνόλου $\{e_i \mid \ i \in I\}$, όπου I αυθαίρετο σύνολο δεικτών και e_i στοιχεία ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), είναι το σύνολο*

$$span\{e_i \mid \ i \in I\} = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} e_{i_k} \mid \ n \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_{i_k} \in \mathbb{K}, \ i_k \in I, \ k = 1, ..., n\}.$$

Ορισμός 2.4.8. *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i \mid \ i \in I\} \subseteq E$ λέγεται* **ορθοκανονική βάση** *του E αν*
i) είναι ορθοκανονική, και
ii) η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E
(δηλαδή $\overline{span\{e_i \mid \ i \in I\}} = E$).

Πρόταση 2.4.9 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, \ y \in E$ ισχύει*

$$| < x, y > | \leq < x, x >^{1/2} < y, y >^{1/2} .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $x, \ y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση 2.4.10. *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η απεικόνιση $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}^+$, με $\|x\| = < x, \ x >^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.*

Πρόταση 2.4.11. *Έστω E ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε*
*i) (**Κανόνας Παραλληλογράμμου**)*

$$\text{για κάθε } \ x, \ y \in E, \ \text{ ισχύει } \ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \text{ και}$$

*ii) (**Πυθαγόρειο Θεώρημα**)*

$$\text{αν } \ x, \ y \in E, \ \text{ με } \ < x, y >= 0, \ \text{ τότε } \ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ορισμός 2.4.12. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν ο X είναι πλήρης ως προς την νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος* **Hilbert**.

Ορισμός 2.4.13. *Αν M_1, M_2 είναι υπόχωροι ενός χώρου V τέτοιοι ώστε $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, τότε το άθροισμα $M_1 + M_2$ ονομάζεται* **ευθύ άθροισμα** *των M_1 και M_2 και συμβολίζεται με $M_1 \oplus M_2$.*

Θεώρημα 2.4.14. *(Ορθογώνια διάσπαση) Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, τότε*

$$M \oplus M^{\perp} = \mathcal{H}.$$

Πρόταση 2.4.15. *Ο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Hilbert, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.*

Ορισμός 2.4.16. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}$, λέγεται* **ημινόρμα** *αν*
i) $p(x + y) \le p(x) + p(y), \;\; x, \; y \in X$, *και*
ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \;\; x \in X, \; \lambda \in \mathbb{K}$.

Παρατηρήσεις 2.4.17. *Αν $p : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμα, ισχύουν*
1) $p(x) = p(-x), \;\; x \in X$.
2) $p(x) \ge 0, \;\; x \in X$.
3) $|p(x) - p(y)| \le p(x - y), \;\; x, \; y \in X$, *και*
4) *Το σύνολο $\{x \in X \mid \; p(x) = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.*

Ορισμός 2.4.18. *Έστω X σύνολο. Μια* **τοπολογία** *του X είναι μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*
i) *Το X και το $\emptyset$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$.*
ii) *Η τομή πεπερασμένης οικογένειας στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$*

$$(\text{δηλαδή, αν } \; n \in \mathbb{N}^* \; \text{ και } \; G_1, ..., G_n \in \mathcal{T} \; \text{ τότε } \; \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}).$$

iii) *Η ένωση αυθαίρετης οικογένειας στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$ (δηλαδή, αν $G_i \in \mathcal{T}, \; i \in I$ αυθαίρετο σύνολο δεικτών, τότε $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$).*

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ καλείται **τοπολογικός χώρος** *και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$* **ανοικτά σύνολα**.

Ορισμός 2.4.19. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι* **συνεχής** *(στον X) αν για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον X.*

Ορισμός 2.4.20. *Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση 1-1 και επί, ώστε f και f^{-1} είναι συνεχείς, τότε η f καλείται* **ομοιομορφισμός**.

Ορισμός 2.4.21. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}$ είναι μια* **βάση** *(για την τοπολογία $\mathcal{T}$) αν κάθε ανοικτό σύνολο είναι ίσο με την ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή, αν για κάθε $G \in \mathcal{T}$ υπάρχουν $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$ ώστε $G = \bigcup_{i\in I} B_i$.*

Τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ είναι τα (ανοικτά) **βασικά σύνολα** *του $(X, \mathcal{T})$.*

Ορισμός 2.4.22. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια $\mathcal{C}$ της $\mathcal{T}$ είναι μια* **υποβάση** *(για την τοπολογία $\mathcal{T}$) αν η οικογένεια των τομών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{C}$ είναι βάση της $\mathcal{T}$. Δηλαδή αν η οικογένεια*

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i=1}^{n} C_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ C_i \in \mathcal{C},\ 1 \le i \le n\} \cup \{X\}$$

είναι μια βάση της $\mathcal{T}$.

Τα στοιχεία της $\mathcal{C}$ λέγονται **υποβασικά** *(ανοικτά) υποσύνολα του X.*

Ορισμός 2.4.23. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η οικογένεια $\mathcal{T}|_A = \{G \cap A \mid G \in \mathcal{T}\}$ είναι μια τοπολογία του A, η* **σχετική τοπολογία** *του A ως προς $\mathcal{T}$.*

Ορισμός 2.4.24. *Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων με σύνολο δεικτών το αυθαίρετο σύνολο I. Η* **καρτεσιανή τοπολογία** *ή* **τοπολογία γινόμενο** *$\mathcal{T}$ του καρτεσιανού γινομένου $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι η τοπολογία που έχει ως βάση $\mathcal{B}$ την οικογένεια*

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} G_i \mid G_i \in \mathcal{T}_i \text{ για } i \in I \text{ και } \{i \in I \mid G_i \ne X_i\} \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Επίσης, αν $\mathcal{B}_i$ είναι μια βάση για την $\mathcal{T}_i$ για $i \in I$, τότε η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\} \text{ για } i \in I \text{ και } \{i \in I \mid B_i \ne X_i\} \text{ πεπερασμένο}\},$$

είναι μια βάση για την καρτεσιανή τοπολογία.

Θεώρημα 2.4.25 (Tychonoff). *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων. Τότε, ο χώρος γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$, με την καρτεσιανή τοπολογία, είναι συμπαγής.*

Έστω X γραμμικός χώρος και $\mathcal{P}$ μια οικογένεια από ημινόρμες $p : X \to \mathbb{R}^+$. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{\{x \in X \mid\ p(x - x_0) < \varepsilon\} \mid\ x_0 \in X,\ \varepsilon > 0,\ p \in \mathcal{P}\}$ και $\mathcal{B} = \{A_1 \cap ... \cap A_n \mid\ n \in \mathbb{N}^*,\ A_i \in \mathcal{A}\} \cup \{X\}$. Αν $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια όλων των δυνατών ενώσεων συνόλων από τη $\mathcal{B}$, η $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία που επάγεται στον X από την οικογένεια $\mathcal{P}$. Κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής ως προς την $\mathcal{T}$. Ένα σύνολο $U \subseteq X$ θα είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}$ αν για κάθε $x_0 \in U$ υπάρχουν $p_1, ..., p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{x \in X \mid\ p_i(x - x_0) < \varepsilon_i\} \subseteq U.$$

Ορισμός 2.4.26. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Θέτουμε για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid\ f$ συνεχής $\}$. Ο $\mathcal{C}(X)$ είναι γραμμικός χώρος. Αν ο X είναι συμπαγής, θέτουμε για $f \in \mathcal{C}(X)$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid\ x \in X\}$.*

Πρόταση 2.4.27. *Αν X συμπαγής τοπολογικός χώρος, τότε ο $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

Πρόταση 2.4.28. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε ο χώρος $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος.*

Ορισμός 2.4.29. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο* **(τοπολογικός) δυϊκός** *X^* του X είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $f : X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και είναι γραμμικός χώρος ως προς τις κατά σημείο πράξεις. Αν $f \in X^*$, ο αριθμός*

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$$

είναι πεπερασμένος, και η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X^*.

Ορισμός 2.4.30. *Έστω V και W χώροι με νόρμα. Μια γραμμική συνάρτηση $T : V \to W$ λέγεται* **ισομετρία** *, αν $\|T(u)\|_W = \|u\|_V$ για κάθε $u \in V$. Οι χώροι V και W λέγονται* **ισομετρικά ισόμορφοι** *αν υπάρχει $T : V \to W$ ισομετρία επί.*

Θεώρημα 2.4.31. *Έστω p, q* **συζυγείς εκθέτες** *με $1 \leq p < \infty$ (δηλαδή $1/p + 1/q = 1$ όταν $1 < p < \infty$ και $q = \infty$ όταν $p = 1$). Τότε οι χώροι $(L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu))^*$ και $L^q_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

Ορισμός 2.4.32. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Κάθε $x \in X$ ορίζει μια ημινόρμα $p_x : X^* \to \mathbb{R}^+$ με*

$$p_x(x^*) = |x^*(x)|.$$

Η οικογένεια $\mathcal{P} = \{p_x \mid x \in X\}$ επάγει την **$\mathbf{w}^*-$τοπολογία** *στον X^*. Ένα σύνολο $U \subseteq X^*$ θα λέγεται* **$\mathbf{w}^*-$ανοικτό** *αν για κάθε $x_0^* \in U$ υπάρχουν $x_1, ..., x_n \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* \mid |x^*(x_i) - x^*(x_i)| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Ορισμός 2.4.33. *Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Η οικογένεια $\mathcal{T}_\rho$ όλων των ανοικτών (ως προς την μετρική ρ) του X, είναι μια τοπολογία του X και καλείται* **μετρική τοπολογία** *του X.*

Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **μετρικοποιήσιμος** *όταν υπάρχει μετρική ρ στο X ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$.*

Θεώρημα 2.4.34 (Συμπάγειας του Αλάογλου)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε, η B_{X^*} είναι w^*-συμπαγής.*

Πόρισμα 2.4.35. *Αν X διαχωρίσιμος χώρος Banach τότε (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος.*

Ορισμός 2.4.36. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $U \subseteq X$. Το U είναι* **περιοχή** *του x αν $x \in U^\circ$.*

Η οικογένεια όλων των περιοχών του x είναι το **σύστημα περιοχών** *του x και συμβολίζεται με $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.*

Ορισμός 2.4.37. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια υποοικογένεια $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ του συστήματος περιοχών $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ του x είναι μια* **βάση περιοχών** *του x, αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ ώστε $B \subseteq U$.*

Ορισμός 2.4.38. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Ο X λέγεται* **τοπικά κυρτός** *αν για κάθε $x \in X$ έχει μια βάση περιοχών, που αποτελείται από ανοικτά, κυρτά σύνολα.*

Ορισμός 2.4.39. *Ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος X λέγεται* **Hausdorff** *(ή χώρος $\mathbf{T_2}$) αν για κάθε $x,\ y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $x \in G_1,\ y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Ο X λέγεται **φυσιολογικός** *(ή χώρος $\mathbf{T_4}$) αν για κάθε $F_1,\ F_2$ κλειστά υποσύνολα του X, ώστε $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, υπάρχουν $G_1,\ G_2$ ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $F_1 \subseteq G_1,\ F_2 \subseteq G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Ορισμός 2.4.40. *Έστω X γραμμικός χώρος και $K \subseteq X$.*
i) Το K είναι **κυρτό** *αν για κάθε $x,\ y \in K$ και $\lambda \in [0,1]$, ισχύει $\lambda x+(1-\lambda)y \in K$.*
ii) **Κυρτή θήκη** *του K είναι το σύνολο*

$$conv(K) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in K,\ i=1,..,n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Ορισμός 2.4.41. *Έστω X γραμμικός χώρος, K ένα κυρτό υποσύνολο του X και $x \in K$. Το x λέγεται* **ακραίο σημείο** *του K αν δεν υπάρχουν $y,\ z \in K,\ y \neq z$, και $0 < \lambda < 1$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ (δηλαδή x ακραίο σημείο του K αν δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο άλλων σημείων του K).Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζουμε με $ex(K)$.*

Θεώρημα 2.4.42 (Krein-Milman)**.** *Έστω X ένας τοπικά κυρτός Hausdorff τοπολογικός γραμμικός χώρος και K ένα μη κενό, συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του X. Τότε το K είναι ίσο με την* **κλειστή κυρτή θήκη** *$\overline{conv(ex(K))}$ του συνόλου $ex(K)$.*

2.5 Στοιχεία Θεωρίας Τελεστών

Για την απόδειξη των παρακάτω προτάσεων και θεωρημάτων της παραγράφου αυτής, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [33].

Ορισμός 2.5.1. *i)* *Μια γραμμική απεικόνιση* $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$, *όπου* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *(μιγαδικοί εν γένει) χώροι με νόρμα, λέγεται* **φραγμένος τελεστής** *αν ο περιορισμός της* T *στην κλειστή μοναδιαία μπάλα* $B_E = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\}$ *του* E *είναι φραγμένη συνάρτηση.*
ii) *Αν* $T : E \to F$ *γραμμική απεικόνιση, θέτουμε*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F \mid x \in E, \ \|x\|_E \leq 1\} \in [0, \infty].$$

Η T *είναι φραγμένη αν και μόνο αν* $\|T\| < \infty$.

Ακόμα, με $\mathcal{B}(E, F)$ *συμβολίζουμε το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων* $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$, *και* $\mathcal{B}(E) := \mathcal{B}(E, E)$.

Θεώρημα 2.5.2. *Αν* $(E, \|\cdot\|_E)$ *και* $(F, \|\cdot\|_F)$ *είναι (μιγαδικοί εν γένει) χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:*
i) Η T *είναι συνεχής.*
ii) Η T *είναι συνεχής στο 0.*
iii) Η T *είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του* E.
iv) Υπάρχει $M < \infty$ *ώστε* $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ *για κάθε* $x \in E$.
v) Ο περιορισμός της T *στην μοναδιαία σφαίρα του* E *είναι φραγμένη συνάρτηση.*
vi) Η T *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Ορισμός 2.5.3. *Έστω* $K : L^2_{\mathbb{C}}[\alpha, \beta] \to L^2_{\mathbb{C}}[\alpha, \beta]$ *με*

$$(Kf)(x) = \int_\alpha^\beta k(t, s) f(s) ds$$

όπου $k \in L^2_{\mathbb{C}}([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$ *και* $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$. *Ο τελεστής αυτός καλείται* **ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα** k.

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω* $\mathcal{H}$ *χώρος Hilbert. Για κάθε* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *υπάρχει μοναδικός* $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ώστε*

$$< T^* x, y > = < x, Ty > \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{H}. \qquad (*)$$

Ορισμός 2.5.5. *Ο* **συζυγής** T^* *ενός φραγμένου τελεστή* T *σε έναν χώρο Hilbert είναι ο μοναδικός φραγμένος τελεστής στον ίδιο χώρο που ορίζεται από την σχέση* $(*)$ *του προηγούμενου θεωρήματος.*

Παρατήρηση 2.5.6. *Γενικότερα, αν $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ είναι δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ που ικανοποιεί την σχέση*

$$< Tx, y >=< x, T^*y > \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}_1,\ y \in \mathcal{H}_2.$$

Ορισμός 2.5.7. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο T λέγεται*
i) **αυτοσυζυγής** *αν $T = T^*$,*
ii) **φυσιολογικός** *αν $T^*T = TT^*$, και*
iii) **unitary** *αν $T^*T = TT^* = I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathcal{H}$.*

Πρόταση 2.5.8. *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, όπου $\mathcal{H}$ μιγαδικός χώρος Hilbert. Τότε, ο T είναι unitary αν και μόνον αν είναι ισομετρία επί του $\mathcal{H}$.*

Ορισμός 2.5.9. *Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών (εν γένει μιγαδικών) χώρων E, F λέγεται* **τάξης** *n ,$n \in \mathbb{N}$, αν είναι φραγμένη και ο υπόχωρος $imT := T(E) = \{T(x) \in F \mid x \in E\}$ έχει διάσταση n.*

Ορισμός 2.5.10. *Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται* **συμπαγής** *αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(B_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F).*

Θεώρημα 2.5.11. *Αν $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) Ο T είναι συμπαγής τελεστής.
ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq \mathcal{H}$, το $T(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.
iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{H}$, η ακολουθία $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.
iv) Το σύνολο $T(B_{\mathcal{H}})$ είναι ολικά φραγμένο.
v) Το σύνολο $T(B_{\mathcal{H}})$ είναι συμπαγές.
vi) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{H}$, ισχύει $< Tx_n, x_n >\to 0$ καθώς $n \to \infty$.
vii) Υπάρχει ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Ορισμός 2.5.12. *Το* **φάσμα** *ενός φραγμένου τελεστή T σε έναν χώρο Banach X, είναι το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{ ο τελεστής } T - \lambda I \text{ δεν έχει αντίστροφο}\}.$$

Πρόταση 2.5.13. *Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή σε έναν χώρο Banach είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Πρόταση 2.5.14. *Αν T unitary τελεστής, τότε $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.*

Ορισμός 2.5.15. *Θεωρούμε τον χώρο $L^2_{\mathbb{C}}$ και έναν $T : L^2_{\mathbb{C}} \to L^2_{\mathbb{C}}$ φραγμένο τελεστή. Αν $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ μη μηδενική συνάρτηση με $Tf = \lambda f$ για κάποιο λ μιγαδικό αριθμό, λέμε ότι το λ είναι* **ιδιοτιμή** *και η f* **ιδιοσυνάρτηση** *του τελεστή T. Το σύνολο των ιδιοτιμών του T καλείται* **σημειακό φάσμα** *του T.*

Αν Y υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{C}}$ με $TY = Y$ ο οποίος δεν περιέχει ιδιοσυναρτήσεις του T, λέμε ότι ο T έχει **συνεχές φάσμα** *στο Y.*

Μια ιδιοτιμή λ του T είναι **απλή** *αν $Tf = \lambda f$ και $Tg = \lambda g$ συνεπάγεται ότι η g είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο της f.*

Τέλος, αν Y υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{C}}$ με $TY = Y$, έχει βάση που αποτελείται από συναρτήσεις $f_{i,j}$ με $Tf_{i,j} = f_{i,j+1}$, όπου $i \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{Z}$, λέμε ότι ο T έχει **αριθμήσιμο φάσμα Lebesgue** *στο Y.*

Ορισμός 2.5.16. *Έστω E χώρος με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : E \to E$ λέγεται* **ταυτοδύναμος** *αν $T^2 = T$.*

Ορισμός 2.5.17. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ταυτοδύναμος, αυτοσυζυγής μη μηδενικός τελεστής. Ο P καλείται* **ορθή προβολή** *επί του imP (ή απλούστερα, προβολή).*

Τα ακόλουθα αποτελέσματα αποδεικνύονται στο [34].

Ορισμός 2.5.18. *Έστω $(K, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Μια οικογένεια $\{E(\Omega) \mid \Omega \in \mathcal{S}\}$ τελεστών στον $\mathcal{H}$ καλείται* **φασματικό μέτρο** *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*
i) $E(\emptyset) = 0,\ E(K) = I$.
ii) $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$.
iii) $E(\Omega) = E(\Omega)^*$.
iv) Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ η απεικόνιση $\mu_{x,x} : \Omega \mapsto < E(\Omega)x,\ x >$ είναι (πεπερασμένο) θετικό μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.

Παρατηρήσεις 2.5.19. 1) *Από ii), iii) έχουμε ότι το φασματικό μέτρο παίρνει τιμές προβολές, άρα για κάθε* $x \in \mathcal{H}$ *έχουμε* $< E(\Omega)x,\ x >= \|E(\Omega)x\|^2$.
2) *Η ιδιότητα iv) θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την*
iv)′ Για κάθε $x,\ y \in \mathcal{H}$ *το* $\mu_{x,\,y}(\Omega) =< E(\Omega)x,\ y >$ *είναι μιγαδικό μέτρο στην* $\mathcal{S}$, *λόγω της* **polarization identity**, *δηλαδή επειδή*

$$< E(\Omega)x,\ y >= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k < E(\Omega)(x+i^k y),\ x+i^k y > .$$

3) *Αν* $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία ξένων ανα δύο συνόλων της* $\mathcal{S}$ *τότε από ii) έχουμε ότι* $E(\Omega_n)$ *είναι κάθετες ανα δύο προβολές. Η σειρά* $\sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Omega_n)$ *όμως δεν συγκλίνει ως προς* $\|\cdot\|$ *(πλην της τετριμμένης περίπτωσης που όλα εκτός από πεπερασμένα* $E(\Omega_n)$ *είναι ίσα με μηδέν), αφού αν* $E(\Omega_n) \neq 0$ *τότε έχουμε* $\|E(\Omega_n)\| = 1$.
4) *Η σχέση iv) μας πληροφορεί ότι η σειρά* $\sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Omega_n)$ *συγκλίνει κατά σημείο. Πράγματι, για κάθε* $x \in \mathcal{H}$ *έχουμε* $\mu_{x,\,x}$ σ-*προσθετικό, άρα*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{x,\,x}(\Omega_n) = \mu_{x,\,x}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n)$$

δηλαδή η $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|E(\Omega_n)x\|^2$ *συγκλίνει (στο* $\|E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n)x\|^2$*). Από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε για* $m > n$

$$\|\sum_{k=n+1}^{m} E(\Omega_k)x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|E(\Omega_k)x\|^2, \quad \text{που είναι βασική ακολουθία, άρα}$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$, *η σειρά* $\sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Omega_n)x$ *συγκλίνει (στην τοπολογία του* $\mathcal{H}$*).*

Τα προηγούμενα ήταν εισαγωγή για το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.5.20 (Φασματικό Θεώρημα). *Αν* T *φυσιολογικός τελεστής σε χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$, *τότε υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο* $E(\cdot)$ *στα Borel υποσύνολα του* $\sigma(T)$ *ώστε*

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda dE_\lambda \ \ (\text{δηλαδή } T = \int f_0 dE \ \text{ όπου } f_0(\lambda) = \lambda).$$

Παρατήρηση 2.5.21. *Αν* h *είναι μια φραγμένη Borel-μετρήσιμη συνάρτηση στο* $\sigma(T)$ *μπορεί να οριστεί το ολοκλήρωμα* $h(T) = \int_{\sigma(T)} h(\lambda)dE(\lambda)$ *παρατηρώντας ότι αν* $f,\ g \in \mathcal{H}$ *τότε* $< E(\cdot)f,\ g >$ *είναι μιγαδικό μέτρο στο* $\sigma(T)$ *και η σχέση*

$$< S(f),\ g >= \int_{\sigma(T)} h(\lambda) d < E(\lambda)f,\ g > \quad \text{για κάθε } f, g \in \mathcal{H}$$

καθορίζει τον $S = h(T)$ στον $\mathcal{H}$. Γενικά

$$T^k = \int_{\sigma(T)} \lambda^k dE(\lambda), \ \ < T^k f,\ g >= \int_{\sigma(T)} \lambda^k d < E(\lambda) f,\ g > .$$

Ορισμός 2.5.22. *Έστω X συμπαγής χώρος T_2 και $I : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Το I καλείται* **θετικό** *αν ισχύει $I(f) \geq 0$ για κάθε $f \in \mathcal{C}(X)$ με $f \geq 0$.*

Θεώρημα 2.5.23 (Αναπαράστασης του Riesz)**.** *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και I ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές του $\mathcal{C}(X)$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό κανονικό μέτρο Borel μ στο X ώστε*

$$I(f) = \int f d\mu \ \text{ για κάθε } \ f \in \mathcal{C}(X).$$

Ορισμός 2.5.24. *Έστω I ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι* **κυρτή** *συνάρτηση αν*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

για κάθε $x,\ y \in I$ και $0 \leq \lambda \leq 1$.

Για το ακόλουθο αποτέλεσμα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [5].

Θεώρημα 2.5.25 (Riesz convexity theorem)**.** *Έστω χώροι μέτρου $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$. Έστω ακόμα L_0 το σύνολο των μ_1-ολοκληρώσιμων απλών συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, L το σύνολο των $\mathcal{A}_2$-μετρήσιμων απεικονίσεων με μιγαδικές τιμές και $T : L_0 \to L$ γραμμικός τελεστής. Αν για ένα δοσμένο ζευγάρι (p, q), ο T έχει επέκταση σε φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον $L^p_{\mathbb{C}}(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ στον $L^q_{\mathbb{C}}(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, συμβολίζουμε την νόρμα αυτής της επέκτασης με $\|T\|_{p,\,q}$, και θέτουμε $\|T\|_{p,\,q} = \infty$ αν τέτοια επέκταση δεν υπάρχει. Τότε, η συνάρτηση του (α, β) : $log\|T\|_{\frac{1}{\alpha},\,\frac{1}{\beta}}$ είναι κυρτή στο ορθογώνιο $0 \leq \alpha,\ \beta \leq 1$.*

Πόρισμα 2.5.26. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $T : L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ γραμμικός τελεστής ορισμένος για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Αν ο T είναι φραγμένος για $p = 1$ και $p = \infty$ με νόρμα το πολύ M, τότε είναι φραγμένος και για κάθε $1 < p < \infty$ με νόρμα το πολύ M.*

2.6 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων

Για τα παρακάτω παραπέμπουμε στο [31].

Ορισμός 2.6.1. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Η $+ : X \times X \to X$ με $+(x,y) = x+y$ για $(x,y) \in X \times X$ είναι (κλειστή)* **πράξη** *στο X αν $x+y \in X$ για κάθε $x,\ y \in X$.*

Ορισμός 2.6.2. *Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία πράξη $+ : X \times X \to X$ καλείται* **ημιομάδα** *αν:*

$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ για κάθε } x\ ,\ y \text{ και } z \in X \quad (\text{προσεταιριστικότης}).$$

Ορισμός 2.6.3. *Ένα μη κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη $+ : G \times G \to G$ καλείται* **ομάδα** *αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:*
i) υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in G$ να ισχύει $x + e = = e + x = x$.
ii) Για κάθε $x \in G$, υπάρχει ένα $y \in G$ τέτοιο ώστε $x + y = y + x = e$, όπου e είναι ένα στοιχείο που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση.
iii) Για κάθε $x,\ y,\ z \in G$ ισχύει $x+(y+z) = (x+y)+z$ (προσεταιριστικότης).

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω ένα μη κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη $+$ η οποία ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα. Το σύνολο G είναι ομάδα αν και μόνο αν ικανοποιείται η εξής ιδιότητα:*
για κάθε δύο στοιχεία $x,\ y \in G$ υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $z,\ w \in G$ ώστε

$$x + z = y \text{ και } w + x = y.$$

Ορισμός 2.6.5. *Έστω G ομάδα με πράξη την $+$. Το μοναδικό στοιχείο $e \in G$ με την ιδιότητα $e + x = x + e = x$ για κάθε $x \in G$ ονομάζεται* **ουδέτερο** *στοιχείο της ομάδας G. Επίσης, αν $x \in G$, το μοναδικό $y \in G$ για το οποίο ισχύει $x + y = y + x = e$ ονομάζεται* **αντίστροφο** *του x και συμβολίζεται με $-x$.*

Ορισμός 2.6.6. *Ένα μη κενό υποσύνολο H μιας ομάδας G θα λέγεται* **υποομάδα** *της G αν το H είναι ομάδα ως προς την πράξη που ορίζεται στη G.*

Πρόταση 2.6.7. *Έστω H ένα μη κενό υποσύνολο μιας ομάδας G. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) το υποσύνολο H είναι υποομάδα της G, και
ii) για κάθε δύο στοιχεία h_1 και h_2 της G που ανήκουν στο H τότε και το στοιχείο $h_1 + (-h_2)$ ανήκει στην H.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Ramsey

Αποδεικνύεται το θεμελιώδες θεώρημα του Ramsey, 1930 [22] (Θεώρημα 3.1.1.), το οποίο μαζί με το Θεώρημα van der Waerden, 1927 [29] (Θεώρημα 3.6.4.) αποτέλεσαν την βάση της Θεωρίας Ramsey. Κορυφαίο αποτέλεσμα της θεωρίας αυτής, είναι το συνδυαστικό θεώρημα του Carlson, 1988 [3], το οποίο είναι ένα διαμεριστικό θεώρημα για λέξεις ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο και αποδεικνύεται πλήρως στην παράγραφο 3.5 (Θεώρημα 3.5.11.). Η απόδειξη που παρουσιάζουμε δεν είναι η αρχική απόδειξη που δόθηκε στο [3] από τον Carlson, αλλά μια απλούστερη που δόθηκε από την κ. Β.Φαρμάκη και εμπεριέχεται (ως ειδική περίπτωση) στο άρθρο της [9]. Βασικά εργαλεία της απόδειξης αυτής αναφέρονται στην θεωρία των υπερφίλτρων και μάλιστα στην θεωρία των ελαχιστικών υπερφίλτρων, τις οποίες παρουσιάζουμε συνοπτικά στις παραγράφους 3.2 και 3.4.

Άμεσες συνέπειες του θεωρήματος του Carlson είναι το Θεώρημα Hindman,1974 [18] (Θεώρημα 3.3.2.), το οποίο είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Carlson για αλφάβητο με δύο στοιχεία και το οποίο αποδεικνύεται ανεξάρτητα στην παράγραφο 3.3, και το Θεώρημα Hales-Jewett, 1963 [16] (Θεώρημα 3.6.3.), το οποίο δίνει μια συνδυαστική απόδειξη του Θεωρήματος van der Waerden.

3.1 Θεώρημα Ramsey

Συμβολισμός. Έστω X τυχόν σύνολο και $k \in \mathbb{N}^*$. Συμβολίζουμε με:
$[X]^{<\omega}_{>0} = \{F \subseteq X \mid F \neq \emptyset$, πεπερασμένο$\}$,
$[X]^{<\omega} = \{F \subseteq X \mid F$ πεπερασμένο$\}$,
$[X] = \{F \subseteq X \mid F$ άπειρο$\}$, και
$[X]^k = \{(n_1 < ... < n_k) \mid n_1, ..., n_k \in X\}$ τις k-άδες στοιχείων του $X \subseteq \mathbb{N}$.

Στην παρούσα παράγραφο αποδεικνύουμε το θεώρημα του Ramsey και παίρνουμε ως συνέπεια αυτού το θεώρημα του Schur. Τα ακόλουθα αποτελέσματα βρίσκονται στο [39].

Θεώρημα 3.1.1. *(Ramsey,1930 [22]). Έστω $M \in [\mathbb{N}]$ και $k, r \in \mathbb{N}^*$. Αν $[M]^k = \bigcup_{i=1}^r C_i$ τότε υπάρχει $1 \le i_0 \le r$ και $L \in [M]$ ώστε $[L]^k \subseteq C_{i_0}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στα k, r. Έστω $r = 2$ και $k \in N^*$. Κάνουμε επαγωγή στο k. Για $k = 1$ έχουμε $[M]^1 = \{(m) \mid m \in M\}$ και έστω $[M]^1 = C_1 \cup C_2$, θέτουμε $I = \{m \in M \mid (m) \in C_1\}$. Αν I είναι άπειρο τότε για $L = I \subseteq M$ έχουμε $[L]^1 \subseteq C_1$. Αν I πεπερασμένο τότε το $M \setminus I$ είναι άπειρο. Άρα αν $L = M \setminus I$ τότε $L \in [M]$ και $[L]^1 \subseteq [M]^1 \setminus C_1 \subseteq C_2$, δηλαδή για $k = 1$ έχουμε το συμπέρασμα.

Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για k. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $k+1$. Έστω $M \in [\mathbb{N}]$ και $[M]^k = C_1 \cup C_2$.

Βήμα 1ο: Έστω $m_1 = \min M$, θέτουμε $M_1 = M \setminus \{m_1\}$ και ορίζουμε μια $2-$διαμέριση του $[M_1]^k$ ως εξής: θέτουμε
$C_1^1 = \{(x_1 < ... < x_k) \in [M_1]^k \mid (m_1 < x_1 < ... < x_k) \in C_1\}$, και
$C_2^1 = \{(x_1 < ... < x_k) \in [M_1]^k \mid (m_1 < x_1 < ... < x_k) \in C_2\}$. Τότε $[M_1]^k = C_1^1 \cup C_2^1$, άρα από επαγωγική υπόθεση υπάρχει $L_1 \in [M_1]$ ώστε $[L_1]^k \subseteq C_1^1$ ή $[L_1]^k \subseteq C_2^1$, δηλαδή είτε
(1) $(m_1 < x_1 < ... < x_k) \in C_1$ για κάθε $(x_1 < ... < x_k) \in [L_1]^k$, είτε
(2) $(m_1 < x_1 < ... < x_k) \in C_2$ για κάθε $(x_1 < ... < x_k) \in [L_1]^k$.

Βήμα 2ο: Έστω $m_2 = \min L_1$, θέτουμε $M_2 = L_1 \setminus \{m_2\}$ και ορίζουμε μια $2-$διαμέριση του $[M_2]^k$ ως εξής: θέτουμε
$C_1^2 = \{(x_1 < ... < x_k) \in [M_2]^k \mid (m_2 < x_1 < ... < x_k) \in C_1\}$, και
$C_2^2 = \{(x_1 < ... < x_k) \in [M_2]^k \mid (m_2 < x_1 < ... < x_k) \in C_2\}$. Τότε $[M_2]^k = C_1^2 \cup C_2^2$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $L_2 \in [M_2]$ (οπότε $L_2 \subsetneq L_1$) ώστε είτε
(1) $(m_2 < x_1 < ... < x_k) \in C_1$ για κάθε $(x_1 < ... < x_k) \in [L_2]^k$, είτε
(2) $(m_2 < x_1 < ... < x_k) \in C_2$ για κάθε $(x_1 < ... < x_k) \in [L_2]^k$.
Κατασκευάζουμε επαγωγικά: $m_1 < m_2 < ... < m_n < ...$ στοιχεία του M και

$$L_n \in [M],\ n \in \mathbb{N} \ \text{ με } \ L_0 := M \supseteq L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq ... \supsetneq L_n \supsetneq ...$$

ώστε $m_n = \min L_{n-1}$, $n \ge 1$ και είτε
$(m_n < x_1 < ... < x_k) \in C_1$ για κάθε $(x_1 < ... < x_k) \in [L_n]^k$, είτε
$(m_n < x_1 < ... < x_k) \in C_2$ για κάθε $(x_1 < ... < x_k) \in [L_n]^k$.

Βήμα $(n+1)$ο: Έστω $m_{n+1} = \min L_n$, θέτουμε $M_{n+1} = L_n \setminus \{m_{n+1}\}$ και τότε $[M_{n+1}]^k = C_1^{n+1} \cup C_2^{n+1}$ όπου
$C_1^{n+1} = \{(x_1 < ... < x_k) \in [M_{n+1}]^k \mid (m_{n+1} < x_1 < ... < x_k) \in C_1\}$ και

$C_2^{n+1} = \{(x_1 < ... < x_k) \in [M_{n+1}]^k \mid (m_{n+1} < x_1 < ... < x_k) \in C_2\}$.
Από επαγωγική υπόθεση υπάρχει $L_{n+1} \in [M_{n+1}]$, (άρα $L_{n+1} \subsetneq L_n$) και είτε
(1) $[L_{n+1}]^k \subseteq C_1$ είτε (2) $[L_{n+1}]^k \subseteq C_2$.
Θέτουμε $I = \{n \in N \mid$ το ζεύγος (m_n, L_n) ικανοποιεί την συνθήκη (1)$\}$.
Αν I άπειρο, θέτουμε $L = \{m_n \mid n \in I\}$. Τότε $L \in [M]$ και επιπλέον $[L]^{k+1} \subseteq C_1$. Πράγματι, αν $(m_{n_1} < m_{n_2} < ...m_{n_{k+1}}) \in [L]^{k+1}$ τότε έχουμε $(m_{n_2} < ...m_{n_{k+1}}) \in [L_{n+1}]^k$ άρα $(m_{n_1} < m_{n_2} < ...m_{n_{k+1}}) \in C_1$ από ορισμό του I και των L_n. Αν I πεπερασμένο, τότε $\mathbb{N} \setminus I$ άπειρο. Θέτουμε $L = \{m_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus I\}$ και το ζεύγος $(m_n, L_n)_{n \notin I}$ ικανοποιεί την σχέση (2). Ανάλογα δείχνουμε $[L]^{k+1} \subseteq C_2$. Άρα για $r = 2, k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει το θεώρημα.

Γενικά, έστω $r, k \in \mathbb{N}^*$. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο r. Για $r = 2$ ισχύει από πριν. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για r. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $r + 1$. Θεωρούμε $M \in [\mathbb{N}]$, με $[M]^k = \bigcup_{i=1}^r C_i \cup C_{r+1}$. Από επαγωγική υπόθεση (για $r = 2$) υπάρχει $L \in [M]$ ώστε $[L]^k \subseteq \bigcup_{i=1}^r C_i$ ή $[L]^k \subseteq C_{r+1}$. Αν $[L]^k \subseteq C_{r+1}$ έχουμε το συμπέρασμα, αλλιώς $[L]^k = \bigcup_{i=1}^r C_i'$, όπου $C_i' = C_i \cap [L]^k$. Από επαγωγική υπόθεση (για το r) υπάρχει $L' \in [L]$ (άρα $L' \in [M]$) ώστε $[L']^k \subseteq C_{i_0}' \subseteq C_{i_0}$ για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$. Άρα ισχύει το θεώρημα για $r + 1$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 3.1.2. *(Schur, 1916 [25]). Έστω $r \in \mathbb{N}$. Αν $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^r C_i$ είναι μια διαμέριση του $\mathbb{N}$, τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ και $x, y, z \in C_{i_0}$ ώστε $x+y = z$.*

Απόδειξη. Ισχύει $[\mathbb{N}]^2 = \bigcup_{i=1}^r C_i'$, όπου $C_i' = \{(n < m) \in [\mathbb{N}]^2 \mid m - n \in C_i\}$ για κάθε $i = 1, ..., r$. Από θεώρημα Ramsey υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ και $1 \leq i_0 \leq r$ ώστε $[M]^2 \subseteq C_{i_0}'$. Θεωρούμε $m_1 < m_2 < m_3 \in M$. Τότε

$$\{(m_1, m_2), (m_2, m_3), (m_1, m_3)\} \subseteq [M]^2 \subseteq C_{i_0}'.$$

Αν $x := m_2 - m_1,\ y := m_3 - m_2,\ z := m_3 - m_1$, τότε x, y και $z \in C_{i_0}$ με $x + y = z$. □

3.2 Ο χώρος των Υπερφίλτρων

Προκειμένου να αποδείξουμε γενικότερα αποτελέσματα ως προς το Θεώρημα Ramsey, όπως τα Θεωρήματα Hindman (Θεώρημα 3.3.2.) και Carlson (Θεώρημα 3.5.11.), θα αναφερθούμε στην θεωρία των υπερφίλτρων, βασικά αποτελέσματα της οποίας αναφέρονται στην παράγραφο αυτή.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω ένα μη κενό σύνολο X. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ λέγεται* **υπερφίλτρο** *στο X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i) $\mu(X) = 1$, *και*
ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *για κάθε* A, B *ξένα υποσύνολα του* X.
Το σύνολο όλων των υπερφίλτρων του X *συμβολίζεται με* $\mathfrak{B}X$.

Ιδιότητες των υπερφίλτρων. Έστω $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ ένα υπερφίλτρο στο X. Τότε για κάθε A, B υποσύνολα του X, ισχύουν τα ακόλουθα:
1. Αν $A \subseteq B$, τότε $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
2. Αν $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
4. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
5. Αν $\mu(A) = 1$, $\mu(B) = 1$, τότε $\mu(A \cap B) = 1$.
6. Αν $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 0$, τότε $\mu(A \cup B) = 0$.
7. $\mu(A) = 1$ ή $\mu(X \setminus A) = 1$.

Εναλλακτικά, ένα υπερφίλτρο μπορεί να ορισθεί μέσω της έννοιας της μεγιστικής βάσης φίλτρου.

Ορισμός 3.2.2. *Έστω ένα μη κενό σύνολο* X, *και* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *μια οικογένεια υποσυνόλων του* X. *Η* $\mathcal{A}$ *είναι* **βάση φίλτρου** *στο* X, *αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*
i) $\emptyset \notin \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$, *και*
ii) $A \cap B \in \mathcal{A}$ *αν* A, $B \in \mathcal{A}$.

Στην οικογένεια των βάσεων φίλτρου ορίζεται η σχέση διάταξης του περιέχεσθαι " $\subseteq$ ", οπότε, μια βάση φίλτρου $\mathcal{A}$ στο X ονομάζεται μεγιστική αν κάθε βάση φίλτρου $\mathcal{B}$ στο X με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ισούται με την $\mathcal{A}$.

Πρόταση 3.2.3. *Μια βάση φίλτρου* $\mathcal{A}$ *στο* X *είναι μεγιστική αν και μόνο αν για κάθε* $A \subseteq X$, *είτε* $A \in \mathcal{A}$ *είτε* $A^c \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μεγιστική βάση φίλτου. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{\mu \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(X)} |\ \mu(X) = 1,\ \mu(\emptyset) = 0,\ \mu(A \cap B) = 1 \text{ αν } \mu(A) = \mu(B) = 1 \text{ και } \mu(C) = 1 \text{ για κάθε } C \in \mathcal{A}\}.$$

Ορίζοντας $\mu_{\mathcal{A}}(A) = 1 \iff A \in \mathcal{A}$, έχουμε $\mu_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$, άρα $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Ορίζουμε στα στοιχεία του $\mathcal{C}$ διάταξη: $\mu_1 \leq \mu_2 \iff \mu_1(A) \leq \mu_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{P}(X)$. Έστω $G \subseteq \mathcal{C}$ ολικά διατεταγμένη οικογένεια.

Ορίζουμε $\mu(A) = 1 \iff \mu_\star(A) = 1$ για κάποιο $\mu_\star \in \mathcal{C}$.
Τότε ισχύει $\mu_\star \leq \mu$ για κάθε $\mu \in G$ και $\mu \in \mathcal{C}$. Από Λήμμα Zorn υπάρχει $\mu_0 \in \mathcal{C}$ μεγιστικό.

Ισχυρισμός Ι. $\mu_0(A) = 1$ αν $B \subseteq A$ και $\mu_0(B) = 1$.
Πράγματι, ορίζουμε $\mu(A) = 1 \iff$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $\mu_0(B) = 1$. Τότε έχουμε ότι $\mu \in \mathcal{C}$, $\mu_0 \leq \mu$ και άρα $\mu = \mu_0$ λόγω μεγιστικότητας.

Ισχυρισμός ΙΙ. Αν $\mu_0(C) = 1$ τότε $\mu_0(X \setminus C) = 1$.
Ορίζουμε $\mu(A) = 1 \iff \mu_0(A) = 1$ ή $A = A_1 \cap (X \setminus C)$, όπου $\mu_0(A_1) = 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\mu \in \mathcal{C}$. Από ορισμό του μ έχουμε ότι $\mu_0 \leq \mu$, άρα $\mu_0 = \mu$ και $\mu_0(X \setminus C) = 1$ διότι $X \setminus C = X \cap (X \setminus C)$ με $\mu_0(X) = 1$.

Ισχυρισμός ΙΙΙ. $\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$ για κάθε $A \cap B = \emptyset$.
Πράγματι, αν $\mu_0(A) = 1$, από Ισχυρισμό ΙΙ έχουμε $\mu_0(X \setminus A) = 0$ άρα και $\mu_0(B) = 0$ καθώς $B \subseteq X \setminus A$. Από Ισχυρισμό Ι έχουμε $\mu_0(A \cup B) = 1$, άρα $\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$. Αν $\mu_0(A) = \mu_0(B) = 0$ τότε από Ισχυρισμό ΙΙ, έχουμε $\mu_0(X \setminus A) = \mu_0(X \setminus B) = 1$ άρα $\mu_0((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = 1$ και άρα $\mu_0(A \cup B) = 0 = \mu_0(A) + \mu_0(B)$.
Από τους Ισχυρισμούς Ι, ΙΙ και ΙΙΙ και την μεγιστικότητα της $\mathcal{A}$, καθώς $\mathcal{A} = \{A \subseteq X | \ \mu_{\mathcal{A}}(A) = 1\}$ για $\mu_{\mathcal{A}}$ μεγιστικό ως προς $\leq$, έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, αν η $\mathcal{A}$ δεν είναι μεγιστική βάση φίλτρου, θα υπάρχει βάση φίλτρου $\mathcal{A}_1$ ώστε: $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}_1$. Άρα υπάρχει $A \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}$. Από υπόθεση πρέπει $X \setminus A \in \mathcal{A}$ άρα και $X \setminus A \in \mathcal{A}_1$, δηλαδή $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{A}_1$, άτοπο. □

Άμεση συνέπεια της πρότασης αυτής, είναι η ταύτιση των εννοιών του υπερφίλτρου και της μεγιστικής βάσης φίλτρου σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση, η απόδειξη της οποίας παραλείπεται λόγω απλότητας.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω X μη κενό σύνολο. Τότε,*
i) αν μ είναι υπερφίλτρο στο X, τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \mu(A) = 1\}$$

είναι μεγιστική βάση φίλτρου στο X, και
ii) αν μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι μεγιστική βάση φίλτρου, τότε η συνάρτηση

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\} \ \text{με} \ \mu(A) = 1 \ \text{αν} \ A \in \mathcal{A} \ \text{και} \ \mu(A) = 0 \ \text{αν} \ A \notin \mathcal{A},$$

είναι υπερφίλτρο στο X.

Ορισμός 3.2.5. *Έστω ένα μη κενό σύνολο X. Ένα υπερφίλτρο στο X λέγεται* **τετριμμένο** *αν είναι της μορφής μ_x, $x \in X$, όπου $\mu_x : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ με $\mu_x(A) = 1$ αν $x \in A$ και $\mu_x(A) = 0$ αν $x \notin A$.*

Παρατηρήσεις 3.2.6. *Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, για κάθε μη κενό σύνολο X ισχύουν:*
1) το σύνολο των υπερφίλτρων $\mathfrak{B}(X)$ στο X είναι μη κενό. Για παράδειγμα, $\mu_x \in \mathfrak{B}(X)$ για κάθε $x \in X$, και
2) ένα υπερφίλτρο μ στο X είναι μη τετριμμένο αν και μόνο αν $\mu(A) = 0$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του X.

Πρόταση 3.2.7. *Έστω X μη κενό σύνολο.*
1) Αν X πεπερασμένο, τότε το σύνολο $\mathfrak{B}(X)$ περιέχει μόνο τετριμμένα υπερφίλτρα.
2) Αν X άπειρο, τότε το σύνολο $\mathfrak{B}(X)$ περιέχει μη τετριμμένα υπερφίλτρα.

Απόδειξη. 1) Έστω X πεπερασμένο και μ υπερφίλτρο στο X. Τότε $\mu = \mu_x$ για κάποιο $x \in X$. Πράγματι, αφού $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ και $\mu(X) = 1$, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $\mu(\{x\}) = 1$. Τότε $\mu = \mu_x$, διότι αν $A \subseteq X$ και $x \notin A$, έχουμε $1 = \mu(A \cup \{x\}) = \mu(A) + 1$, άρα $\mu(A) = 0$.

2) Έστω X άπειρο σύνολο. Ορίζουμε

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \ \text{πεπερασμένο}\}.$$

Τότε, $\mathcal{B}$ βάση φίλτρου στο X. Πράγματι, $\emptyset \notin \mathcal{B}$, $X \in \mathcal{B}$ και για κάθε $A,\ B \in \mathcal{B}$ έχουμε $A \cap B \in \mathcal{B}$, γιατί το σύνολο $X \setminus A \cap B = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ είναι πεπερασμένο.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε βάση φίλτρου $\mathcal{B}$ στο X υπάρχει μεγιστική βάση φίλτρου $\mathcal{A}$ στο X ώστε $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Έστω

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \ \mathcal{F} \ \text{βάση φίλτρου και} \ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}\}, \ \text{με διάταξη “} \subseteq \text{”}.$$

Τότε $\mathcal{C} \neq \emptyset$ διότι $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$. Έστω $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ μια μη κενή ολικά διατεταγμένη υποοικογένεια της $\mathcal{C}$. Τότε η οικογένεια $\mathcal{U} := \bigcup\{\mathcal{F} \mid \ \mathcal{F} \in \mathcal{D}\}$ είναι βάση φίλτρου στο X. Πράγματι, $\emptyset \notin \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$ και αν $A,\ B \in \mathcal{U}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$ καθώς υπάρχουν $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{D}$ ώστε $A \in \mathcal{F}_1$, και $B \in \mathcal{F}_2$. Εφόσον είτε $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ είτε $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$, έχουμε ότι είτε $A \cap B \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}$, είτε $A \cap B \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Μάλιστα το $\mathcal{U}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{C}$ και είναι άνω φράγμα της οικογένειας $\mathcal{D}$, αφού περιέχει όλα τα στοιχεία της. Από το Λήμμα Zorn συνεπάγεται ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ περιέχει μεγιστικό στοιχείο, έστω $\mathcal{A}$. Τότε το $\mathcal{A}$ είναι προφανώς μεγιστική βάση φίλτρου στο X και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ με $\mu(A) = 1$ αν και μόνο αν $A \in \mathcal{A}$. Το μ είναι υπερφίλτρο στο X (Πρόταση 3.2.4.) και μάλιστα μη τετριμμένο καθώς για $A \subseteq X$ πεπερασμένο ισχύει $X \setminus A \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, άρα $\mu(X \setminus A) = 1$ και $\mu(A) = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από Παρατήρηση 3.2.6. □

Τοπολογική δομή του $\mathfrak{B}$X.

Ορισμός 3.2.8. *Έστω X μη κενό σύνολο. Στο σύνολο $\mathfrak{B}X$ ορίζεται μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ που έχει ως υποβάση την οικογένεια*

$$\mathcal{C} = \{A^* \mid A \subseteq X\}, \text{ όπου } A^* = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(A) = 1\}.$$

Πρόταση 3.2.9. *Έστω X μη κενό σύνολο. Για κάθε $\emptyset \neq A,\ B \subseteq X$ ισχύουν:*
i) $(X \setminus A)^* = \mathfrak{B}X \setminus A^*$, $\emptyset^* = \emptyset$,
ii) $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$,
iii) $A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$, *και*
iv) Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{A^* \mid A \subseteq X\}$ *είναι και βάση της τοπολογίας* $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. *ii)* $\mu \in A^* \cap B^*$ αν και μόνο αν $\mu \in A^*$ και $\mu \in B^*$, δηλαδή $\mu(A) = 1$ και $\mu(B) = 1$, ισοδύναμα, $\mu(A \cap B) = 1$, δηλαδή $\mu \in (A \cap B)^*$.

iv) Έπεται από *ii)*. □

Πρόταση 3.2.10. *Ο τοπολογικός χώρος $(\mathfrak{B}X, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής, T_2 και το σύνολο $\{\mu_x \mid x \in X\}$, το οποίο ταυτίζουμε με το X, είναι ένα πυκνό και ανοικτό υποσύνολο του $\mathfrak{B}X$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο χώρος $(\mathfrak{B}X, \mathcal{T})$ δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει μια ανοικτή κάλυψη $\{A_i^* \mid i \in I\}$ του $\mathfrak{B}X$ από βασικά ανοικτά σύνολα που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή, $\mathfrak{B}X = \bigcup_{i \in I} A_i^*$ και $\bigcup_{i \in F} A_i^* \neq \mathfrak{B}X$ για κάθε $F \subseteq I$ πεπερασμένο. Οπότε για κάθε $F \subseteq I$ πεπερασμένο ισχύει

$$(\bigcap_{i \in F}(X \setminus A_i))^* = \bigcap_{i \in F}(\mathfrak{B}X \setminus A_i^*) = \mathfrak{B}X \setminus \bigcup_{i \in F} A_i^* \neq \emptyset.$$

Θέτουμε

$$\mathcal{A} = \{\bigcap_{i \in F}(X \setminus A_i) \mid F \in [I]^{<\omega}_{>0}\} \cup \{X\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι προφανώς βάση φίλτρου, άρα σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 3.2.7. υπάρχει υπερφίλτρο μ ώστε $\mu(A) = 1$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Άρα $\mu(X \setminus A_i) = 1$ για κάθε $i \in I$ και συνεπώς $\mu(A_i) = 0$ για κάθε $i \in I$, δηλαδή $\mu \notin A_i^*$ για κάθε $i \in I$ και άρα $\mu \notin \bigcup_{i \in I} A_i^* = \mathfrak{B}X$, άτοπο.

Ο χώρος $(\mathfrak{B}X, \mathcal{T})$ είναι χώρος T_2. Έστω $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathfrak{B}X$, τότε υπάρχει $A \subseteq X$ ώστε είτε $\mu_1(A) = 0$ και $\mu_2(A) = 1$ είτε $\mu_1(A) = 1$ και $\mu_2(A) = 0$. Ισοδύναμα, είτε $\mu_2 \in A^*$ και $\mu_1 \in (X \setminus A)^*$ είτε $\mu_1 \in A^*$ και $\mu_2 \in (X \setminus A)^*$. Εφόσον, $A^* \cap (X \setminus A)^* = \emptyset$ έχουμε το ζητούμενο.

Θα αποδείξουμε ότι $\overline{\{\mu_x \mid x \in X\}} = \mathfrak{B}X$. Πράγματι, έστω A^* βασικό ανοικτό σύνολο, όπου $\emptyset \neq A \subsetneq X$. Για $x_0 \in A$ ισχύει $\mu_{x_0} \in A^* \cap \{\mu_x \mid x \in X\}$.

Τέλος, $\{\mu_x \mid x \in X\} \subseteq \mathfrak{B}X$ ανοικτό, διότι $\{\mu_x\} = \{x\}^*$ ειναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathfrak{B}X$ για κάθε $x \in X$. □

Ορισμός 3.2.11. *Έστω X, Y δύο μη κενά σύνολα και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Ορίζεται η συνάρτηση $\mathfrak{B}f : \mathfrak{B}X \to \mathfrak{B}Y$ με $\mathfrak{B}f(\mu) = \mu_f$, όπου $\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$ για κάθε $A \subseteq Y$.*

Η $\mathfrak{B}f$ είναι καλά ορισμένη διότι $\mu_f \in \mathfrak{B}Y$ για κάθε $\mu \in \mathfrak{B}X$. Πράγματι, $\mu_f(Y) = \mu(f^{-1}(Y)) = \mu(X) = 1$ και αν A, B ξένα υποσύνολα του Y τότε $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ ξένα υποσύνολα του X, και τότε $\mu_f(A \cup B) = \mu(f^{-1}(A \cup B)) = = \mu(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) = \mu(f^{-1}(A)) + \mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(A) + \mu_f(B)$.

Πρόταση 3.2.12. *Έστω X, Y δύο μη κενά σύνολα και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Τότε:*
i) $\mathfrak{B}f$ συνεχής συνάρτηση,
ii) $\mathfrak{B}f(\mu_x) = \mu_{f(x)}$ για κάθε $x \in X$, και
iii) $\mathfrak{B}(g \circ f) = \mathfrak{B}g \circ \mathfrak{B}f$ για κάθε συνάρτηση $g : Y \to Z$.

Απόδειξη. *i)* Έστω $A \subseteq Y$. Έχουμε: $(\mathfrak{B}f)^{-1}(A^*) = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(f) \in A^*\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu_f(A) = 1\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(f^{-1}(A)) = 1\} = (f^{-1}(A))^*$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathfrak{B}X$. Τότε η $\mathfrak{B}f$ αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά, άρα είναι συνεχής.

ii) Έστω $A \subseteq Y$ και τυχόν $x \in X$. Τότε $\mu_x(f^{-1}(A)) = \mathfrak{B}f(\mu_x)(A) = 1$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}(A)$,δηλαδή $f(x) \in A$, ισοδύναμα, $\mu_{f(x)}(A) = 1$ που αποδεικνύει το ζητούμενο.

iii) Έστω $A \subseteq Z$ και $\mu \in \mathfrak{B}X$. Τότε $(\mathfrak{B}g \circ \mathfrak{B}f)(\mu)(A) = \mathfrak{B}g(\mu_f)(A) = = (\mu_f)_g(A) = \mu_f(g^{-1}(A)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(A))) = \mu((g \circ f)^{-1}(A)) = \mu_{g \circ f}(A) =$

$= \mathfrak{B}(g \circ f)(\mu)(A)$, άρα $\mathfrak{B}g \circ \mathfrak{B}f = \mathfrak{B}(g \circ f)$. □

Αλγεβρική δομή του $\mathfrak{B}X$.

Ορισμός 3.2.13. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχει ορισθεί μια πράξη $+ : X \times X \to X$. Τότε, στο σύνολο $\mathfrak{B}X$ ορίζεται η πράξη $* : \mathfrak{B}X \times \mathfrak{B}X \to \mathfrak{B}X$ ως εξής: για κάθε μ_1, $\mu_2 \in \mathfrak{B}X$ ορίζεται $\mu_1 * \mu_2 \in \mathfrak{B}X$, θέτοντας για κάθε $A \subseteq X$*

$$\mu_1 * \mu_2(A) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid x + y \in A\}) = 1\}).$$

Ο ορισμός της πράξης $*$ είναι καλός, καθώς για $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathfrak{B}X$ έχουμε: $\mu_1 * \mu_2(X) = \mu_1(X) = 1$ *και για $A,\ B$ ξένα υποσύνολα του X είναι:* $\mu_1 * \mu_2(A \cup B) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid x+y \in A \cup B\}) = 1\}) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid x+y \in A\}) + \mu_2(\{y \in X \mid x+y \in B\}) = 1\}) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid x+y \in A\}) = 1\}) + \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid x+y \in B\}) = 1\}) = \mu_1 * \mu_2(A) + \mu_1 * \mu_2(B)$ *, αφού τα σύνολα $\{y \in X \mid x+y \in A\}$ και $\{y \in X \mid x+y \in B\}$ είναι ξένα.*

Ορισμός 3.2.14. *Ένα μη κενό σύνολο X στο οποίο έχει οριστεί μια τοπολογία $\mathcal{T}$ και μια πράξη $+ : X \times X \to X$ λέγεται* **δεξιά συμπαγής ημιομάδα** *αν*
i) ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής,
ii) το X με την πράξη $+$ είναι ημιομάδα, και
iii) η συνάρτηση $T_{x_0} : X \to X$ με $T_{x_0}(x) = x + x_0,\ x \in X$, είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in X$. (Ανάλογα ορίζεται και η **αριστερή συμπαγής ημιομάδα**.*)*

Θεώρημα 3.2.15. *Έστω $(X, +)$ μια μη κενή ημιομάδα. Τότε η τριάδα $(\mathfrak{B}X, *, \mathcal{T})$ είναι δεξιά συμπαγής ημιομάδα.*

Απόδειξη. $(\mathfrak{B}X, \mathcal{T})$ συμπαγής χώρος από Πρόταση 3.2.10.

Για $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \in \mathfrak{B}X$ και $A \subseteq X$ έχουμε: $\mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)(A) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2 * \mu_3(\{y \in X \mid x+y \in A\}) = 1\}) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{z \in X \mid \mu_3(\{y \in X \mid z+y \in \{y \in X \mid x+y \in A\}\}) = 1\}) = 1\}) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{z \in X \mid \mu_3(\{y \in X \mid x+(y+z) \in A\}) = 1\}) = 1\})$, και $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3(A) = = \mu_1 * \mu_2(\{x \in X \mid \mu_3(\{y \in X \mid x+y \in A\}) = 1\}) = \mu_1(\{z \in X \mid \mu_2(\{x \in X \mid z+x \in \{x \in X \mid \mu_3(\{y \in X \mid x+y \in A\}) = 1\}\}) = 1\}) = \mu_1(\{z \in X \mid \mu_2(\{x \in X \mid \mu_3(\{y \in X \mid (z+x)+y \in A\}) = 1\}) = 1\})$, άρα από προσεταιριστικότητα της πράξης $+$ έχουμε $\mu_1 * (\mu_2 * \mu_3) = (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3$, δηλαδή η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική και τότε $(\mathfrak{B}X, *)$ ημιομάδα.

Τέλος, για $\mu_0 \in \mathfrak{B}X$ η συνάρτηση $T_{\mu_0} : \mathfrak{B}X \to \mathfrak{B}X$ με $T_{\mu_0}(\mu) = \mu * \mu_0$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε βασικό σύνολο A^*, $\emptyset \neq A \subseteq X$ ισχύει $(T_{\mu_0})^{-1}(A^*) = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid T_{\mu_0}(\mu) \in A^*\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu * \mu_0 \in A^*\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu * \mu_0(A) = 1\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(\{x \in X \mid \mu_0(\{y \in X \mid x+y \in A\}) = 1\}) = 1\} = (\{x \in X \mid \mu_0(\{y \in X \mid x+y \in A\}) = 1\})^*$ που είναι ανοικτό σύνολο, ως βασικό. $\square$

Ορισμός 3.2.16. *Έστω $(X, +)$ μια μη κενή ημιομάδα. Κάθε στοιχείο $x \in X$ με την ιδιότητα $x + x = x$ λέγεται* **ταυτοδύναμο**.

Βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας των ημιομάδων είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα του Ellis.

Θεώρημα 3.2.17. *(Ellis, 1969 [6]). Κάθε μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα $(X,+,\mathcal{T})$ περιέχει ταυτοδύναμο στοιχείο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα.

Βήμα 1ο: Υπάρχει ελαχιστική, μη κενή, δεξιά συμπαγής υποημιομάδα του $(X,+,\mathcal{T})$. Πράγματι, θέτουμε

$$\mathcal{C} = \{Y \subseteq X \mid \ Y \neq \emptyset \text{ και } (Y,+,\mathcal{T}|_Y) \text{ δεξιά συμπαγής ημιομάδα}\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι μη κενή, διότι $X \in \mathcal{C}$. Θεωρούμε $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ ολικά διατεταγμένη υποοικογένεια με διάταξη

$$A \leq B \ \ \Leftrightarrow \ \ B \subseteq A, \text{ για κάθε } A,\ B \subseteq X.$$

Η $\mathcal{D}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και περιέχει κλειστά υποσύνολα του X (λόγω του ότι X χώρος T_2). Επειδή X συμπαγής, αν $Z_0 := \bigcap\{Y \mid Y \in \mathcal{D}\}$ έχουμε ότι Z_0 είναι μη κενό, κλειστό, άρα και συμπαγές υποσύνολο του X. Από ορισμό του Z_0 έχουμε ότι $(Z_0,+,\mathcal{T}|_{Z_0})$ είναι δεξιά συμπαγής ημιομάδα, δηλαδή $Z_0 \in \mathcal{C}$, και μάλιστα $Y \leq Z_0$ για κάθε $Y \in \mathcal{D}$. Από Λήμμα Zorn υπάρχει μη κενό $Y_0 \subseteq X$, ώστε Y_0 είναι μεγιστικό (ως προς $\leq$) στην $\mathcal{C}$ δηλαδή η $(Y_0,+,\mathcal{T}|_{Y_0})$ είναι ελαχιστική (ως προς $\subseteq$) δεξιά συμπαγής υποημιομάδα.

Βήμα 2ο: Κάθε στοιχείο μιας ελαχιστικής δεξιάς συμπαγούς υποημιομάδας είναι ταυτοδύναμο. Πράγματι, αν $(Y_0,+,\mathcal{T}|_{Y_0})$ είναι μια ελαχιστική δεξιά συμπαγής υποημιομάδα του $(X,+,\mathcal{T})$, για $y_0 \in Y_0$ ισχύει ότι $Y_0 + y_0 = T_{y_0}(Y_0)$ συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς και ημιομάδα, διότι αν $x_1 + y_0,\ x_2 + y_0 \in Y_0 + y_0$ έχουμε: $(x_1 + y_0) + (x_2 + y_0) = ((x_1 + y_0) + x_2) + y_0 \in Y_0 + y_0$, καθώς, $x_1,\ x_2,\ y_0 \in Y_0$ και Y_0 ημιομάδα. Ακόμα, η T_{y_0} είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $y_0 \in Y_0$ και άρα $Y_0 + y_0$ δεξιά συμπαγής ημιομάδα. Ισχύει $y_0 \in Y_0$, άρα $Y_0 + y_0 \subseteq Y_0$, και τότε $Y_0 + y_0 = Y_0$ επειδή Y_0 ελαχιστική. Υπάρχει λοιπόν $x \in Y_0$ τέτοιο ώστε $x + y_0 = y_0$. Αν

$$Y_1 = \{x \in Y_0 :\ x + y_0 = y_0\},$$

τότε Y_1 είναι μη κενό, $Y_1 = (T_{y_0})^{-1}(\{y_0\})$ συμπαγές, T_x συνεχής για κάθε $x \in Y_1$ και Y_1 ημιομάδα, καθώς για τυχαία $x_1,\ x_2 \in Y_1$, ισχύει $(x_1 + x_2) + y_0 = x_1 + (x_2 + y_0) = x_1 + y_0 = y_0$ δηλαδή $x_1 + x_2 \in Y_1$. $Y_1 \subseteq Y_0$, άρα $Y_1 = Y_0$ και τότε $y_0 \in Y_1$, δηλαδή, $y_0 + y_0 = y_0$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 3.2.18. *Τα στοιχεία μιας ελαχιστικής δεξιά συμπαγούς ημιομάδας είναι ταυτοδύναμα.*

Πόρισμα 3.2.19. *Αν $(X,+)$ μη κενή ημιομάδα, τότε η $(\mathfrak{B}X,*)$ έχει ταυτοδύναμο υπερφίλτρο.*

Παρατήρηση 3.2.20. *Αν $(X,+)$ μη κενή ημιομάδα και ο X ικανοποιεί την συνθήκη: $x+x\neq x$ για κάθε $x\in X$, τότε υπάρχει μη τετριμμένο $\mu\in\mathfrak{B}X$ με $\mu*\mu=\mu$. Πράγματι, από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι υπάρχει μ ταυτοδύναμο στο $\mathfrak{B}X$. Από την σχέση $\mu_x*\mu_y=\mu_{x+y}$ για κάθε $x,\ y\in X$ έχουμε ότι $\mu_x*\mu_x=\mu_{x+x}\neq\mu_x$ για κάθε $x\in X$, και άρα μ όχι τετριμμένο.*

3.3 Γενικευμένο Θεώρημα Hindman

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται ένα γενικευμένο Θεώρημα Hindman, που αφορά πεπερασμένες διαμερίσεις μιας τυχαίας ημιομάδας. Το κλασικό θεώρημα, αναφέρεται στην ειδική περίπτωση της ημιομάδας των φυσικών αριθμών.

Θεώρημα 3.3.1 (Γενικευμένο Θεώρημα Hindman)**.** *Έστω $(X,+)$ μια μη κενή ημιομάδα με $x+x\neq x$, για κάθε $x\in X$. Αν $r\in\mathbb{N}^*$ και $X=\bigcup_{i=1}^r X_i$, τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ και $1\leq i_0\leq r$ ώστε*

$$FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\{\sum_{i\in F}x_i\mid\ F\in[\mathbb{N}^*]^{<\omega}_{>0}\}\subseteq X_{i_0}.$$

Απόδειξη. Από Παρατήρηση 3.2.20. υπάρχει μη τετριμμένο ταυτοδύναμο υπερφίλτρο $\mu\in\mathfrak{B}X$. Επειδή $\mu(X)=1$, θα υπάρχει $1\leq i_0\leq r$ ώστε $\mu(X_{i_0})=1$. Εφόσον $\mu*\mu=\mu$, για κάθε $A\subseteq X$ με $\mu(A)=1$ έχουμε ότι

$$1=\mu(A)=\mu*\mu(A)=\mu(\{x\in A\mid\ \mu(\{y\in A\mid\ x+y\in A\})=1\}).$$

Θα κατασκευάσουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X και $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X ώστε $x_n\in A_n$ και $\mu(A_n)=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Βήμα 1ο: Θέτουμε $A_1=X_{i_0}$ και επιλέγουμε $x_1\in A_1$ ώστε να ισχύει ότι $\mu(\{y\in A_1\mid\ x_1+y\in A_1\})=1$.

Βήμα 2ο: Θέτουμε $A_2=\{y\in A_1\mid\ x_1+y\in A_1\}$ και επιλέγουμε $x_2\in A_2$ ώστε $\mu(\{y\in A_2\mid\ x_2+y\in A_2\})=1$.

Έστω ότι έχουμε ορίσει επαγωγικά $X\supseteq A_1\supseteq...\supseteq A_n$ και $x_1,...,x_n\in X$ ώστε $x_k\in A_k$, $\mu(A_k)=1$ και $\mu(\{y\in A_n\mid\ x_n+y\in A_n\})=1$ για κάθε $1\leq k\leq n$.

Βήμα (n+1)ο: Θέτουμε $A_{n+1}=\{y\in A_n\mid\ x_n+y\in A_n\}$ και επιλέγουμε $x_{n+1}\in A_{n+1}$ ώστε $\mu(\{y\in A_{n+1}\mid\ x_{n+1}+y\in A_{n+1}\})=1$.

Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο k ότι $x_{n_1}+...+x_{n_k} \in A_{n_1} \subseteq A_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και $n_1 < ... < n_k \in \mathbb{N}^*$.

Για $k = 1$, $x_{n_1} \in A_{n_1} \subseteq A_1$, δηλαδή ισχύει το συμπέρασμα. Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για $k \in \mathbb{N}^*$, θα το δείξουμε για $k+1$.
Έχουμε $x_{n_1}+...+x_{n_{k+1}} = x_{n_1}+(x_{n_2}+...+x_{n_{k+1}})$ και από επαγωγική υπόθεση $x_{n_2}+...+x_{n_{k+1}} \in A_{n_2} \subseteq A_{n_1+1}$, άρα $x_{n_1}+(x_{n_2}+...+x_{n_{k+1}}) \in A_{n_1}$. □

Θεώρημα 3.3.2. *(Hindman,1974 [18]). Έστω $\mathbb{N}^* = \bigcup_{i=1}^r C_i$, $r \in \mathbb{N}^*$, διαμέριση των θετικών φυσικών αριθμών. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^*$ και $1 \leq i_0 \leq r$, ώστε*

$$FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{\sum_{i\in F} x_i \mid F \in [\mathbb{N}^*]^{<\omega}_{>0}\} \subseteq C_{i_0}.$$

Απόδειξη. Άμεση από το προηγούμενο θεώρημα για $X = \mathbb{N}^*$ εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης. □

Πρόταση 3.3.3. *Έστω $(X,+)$ μη κενή ημιομάδα και σχέση $R \subseteq X \times X$ στο X ώστε:*
i) για κάθε $x_1,...,x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει $x \in X$ ώστε $(x_i,x) \in R$ για κάθε $i = 1,...,n$, και
ii) αν $(x,y) \in R$ και $(x+y,z) \in R$, τότε ισχύουν $(x,y+z) \in R$ και $(y,z) \in R$.
Τότε, αν

$$\delta X = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(C_x) = 1 \text{ για κάθε } x \in X\},$$

όπου $C_x = \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$, ισχύουν:
1) δX είναι μη κενό.
2) $(\delta X, *)$ είναι υποημιομάδα της $(\mathfrak{B}X, *)$.
3) $(\delta X, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής χώρος.

Απόδειξη. 1) Έχουμε ότι C_x μη κενό για κάθε $x \in X$, αφού από $i)$ υπάρχει $y \in X$ ώστε $(x,y) \in R$ και $\bigcap_{i\in F} C_{x_i} \neq \emptyset$ για $F \in [X]^{<\omega}_{>0}$, καθώς αν $x_{n_1},...,x_{n_k} \in X$, $k \in \mathbb{N}^*$, από $i)$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $(x_{n_i},x) \in R$ για κάθε $i = 1,...,k$. Τότε για το τυχόν $F \in [X]^{<\omega}_{>0}$ ισχύει

$$(\bigcap_{i\in F} C_{x_i})^* = \bigcap_{i\in F} C^*_{x_i} \neq \emptyset, \quad \text{αφού για} \quad y \in \bigcap_{i\in F} C_{x_i}, \text{ ισχύει } \mu_y \in \bigcap_{i\in F} C^*_{x_i}.$$

Θεωρούμε οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{\bigcap_{i\in F} C_{x_i} \mid F \in [X]^{<\omega}_{>0}\} \cup \{X\},$$

η οποία είναι προφανώς βάση φίλτρου, άρα σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 3.2.7. υπάρχει υπερφίλτρο μ ώστε $\mu(A) = 1$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Για το υπερφίλτρο αυτό ισχύει ότι $\mu(C_x) = 1$ για κάθε $x \in X$ και άρα έχουμε $\delta X \neq \emptyset$.

2) Έστω μ_1, $\mu_2 \in \delta X$ και τυχόν $x \in X$. Θα δείξουμε ότι $\mu_1 * \mu_2(C_x) = 1$ και θα έχουμε το ζητούμενο. Ισχύουν: $1 = \mu_1(C_x) = \mu_1(\{y \in X \mid (x,y) \in R\})$, $1 = \mu_2(C_x) = \mu_2(\{y \in X \mid (x,y) \in R\})$, για $y \in X$ έχουμε $x + y \in X$, άρα $1 = \mu_2(C_{x+y}) = \mu_2(\{z \in X \mid (x+y,z) \in R\})$, και επειδή από $ii)$ $(x,y) \in R$, $(x+y,z) \in R$ συνεπάγεται ότι $(x,y+z) \in R$, θα έχουμε $\mu_1 * \mu_2(C_x) = \mu_1(\{y \in X \mid \mu_2(\{z \in X \mid y+z \in C_x\}) = 1\}) = \mu_1(\{y \in C_x \mid \mu_2(\{z \in C_{x+y} \mid y+z \in C_x\}) = 1\}) = \mu_1(\{y \in C_x \mid \mu_2(C_{x+y}) = 1\}) =$
$= \mu_1(C_x) = 1$.

3) Αρκεί να δείξουμε ότι το δX είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathfrak{B}X$.
$\delta X = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(C_x) = 1 \text{ για κάθε } x \in X\} = \bigcap_{x \in X} C_x^*$ και επειδή $(C_x^c)^* = (X \setminus C_x)^* = \mathfrak{B}X \setminus C_x^* = (C_x^*)^c$, έχουμε C_x^* κλειστό, άρα δX κλειστό.
□

Πόρισμα 3.3.4. *Έστω $(X,+)$ μια μη κενή ημιομάδα και $R \subseteq X \times X$ σχέση στο X ώστε να ισχύουν:*
$i)$ για κάθε $x_1, ..., x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει $x \in X$ ώστε $(x_i, x) \in R$ για κάθε $i = 1, ..., n$,
$ii)$ αν $(x,y) \in R$ και $(x+y,z) \in R$, τότε ισχύουν $(x,y+z) \in R$ και $(y,z) \in R$, και
$iii)$ $(x,x) \notin R$ για κάθε $x \in X$.
Αν $r \in \mathbb{N}^*$ και $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$, τότε υπάρχουν ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ η οποία ικανοποιεί $(x_n, x_m) \in R$ για κάθε $n < m \in \mathbb{N}$, και $1 \leq i_0 \leq r$ ώστε

$$FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{\sum_{i\in F} x_i \mid F \in [\mathbb{N}^*]^{<\omega}_{>0}\} \subseteq X_{i_0}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε μ ταυτοδύναμο στοιχείο του δX, το οποίο ικανοποιεί $\mu \neq \mu_x$ για κάθε $x \in X$ (από την σχέση $iii)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $\mu_x(C_x) = 0$ και άρα $\mu_x \notin \delta X$). Στην συνέχεια κατασκευάζουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ όπως στο Θεώρημα 3.3.1. και έχουμε το συμπέρασμα. □

3.4 Ελαχιστικά Ταυτοδύναμα Υπερφίλτρα

Στην παρούσα παράγραφο αναπτύσουμε την θεωρία των ιδεωδών μιας μη κενής ημιομάδας και ορίζουμε διάταξη στα ταυτοδύναμα στοιχεία μιας T_2 δεξιάς συμπαγούς ημιομάδας, εργαλεία τα οποία θα χρειαστούμε προκειμένου να αποδείξουμε το θεώρημα του Carlson (Θεώρημα 3.5.11.).

Ορισμός 3.4.1. *Έστω $(X,+)$ μια μη κενή ημιομάδα και I ένα μη κενό υποσύνολο του X. Το I λέγεται* **δεξιό ιδεώδες** *της X αν*

$$X + I := \{x + y \mid x \in X,\ y \in I\} \subseteq I.$$

Το I καλείται **αριστερό ιδεώδες** *της X, αν $I + X \subseteq I$.*

Το I λέγεται **αμφίπλευρο ιδεώδες** *της X, αν είναι αριστερό και δεξιό ιδεώδες της X.*

Παρατήρηση 3.4.2. *Κάθε δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες I μιας ημιομάδας $(X,+)$ είναι ημιομάδα. Πράγματι, επειδή I δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες της X, τότε $X + I \subseteq I$ (αντίστοιχα $I + X \subseteq I$), άρα και $I + I \subseteq I$.*

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $(X,+)$ μη κενή ημιομάδα. Το $I := X + x_0$, για $x_0 \in X$ είναι δεξιό ιδεώδες της X. (Ανάλογα, το $x_0 + X$, για $x_0 \in X$ είναι αριστερό ιδεώδες της X.)*

Απόδειξη. $I = X + x_0 \subseteq X$ διότι X ημιομάδα, και $X + I \subseteq I$ καθώς για $x \in X$ και $y = z + x_0 \in I$, $z \in X$, έχουμε $x + z \in X$, άρα $x + (z + x_0) = (x + z) + x_0 \in X + x_0 = I$. □

Παρατήρηση 3.4.4. *Έστω $(X,+)$ μη κενή, δεξιά συμπαγής ημιομάδα. Τότε, υπάρχει I συμπαγές δεξιό ιδεώδες της X. Πράγματι, το $I = X + x_0 = T_{x_0}(X)$ είναι δεξιό ιδεώδες και συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς.*

Πρόταση 3.4.5. *Έστω $(X,+)$ μη κενή ημιομάδα και έστω I δεξιό ιδεώδες της X. Τότε για κάθε $x_0 \in X$, το $I + x_0$ είναι δεξιό ιδεώδες της X.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $I + x_0 \subseteq X$ και $X + (I + x_0) = (X + I) + x_0 \subseteq I + x_0$, καθώς η πράξη $+$ είναι προσεταιριστική και $X + I \subseteq I$, διότι I δεξιό ιδεώδες της X. □

Παρατήρηση 3.4.6. *Αν $(X,+)$ μια μη κενή, δεξιά συμπαγής ημιομάδα και I συμπαγές δεξιό ιδεώδες της X, τότε $I + x_0$ συμπαγές δεξιό ιδεώδες για κάθε $x_0 \in X$.*

Πρόταση 3.4.7. *Έστω $(X,+)$ μια μη κενή, T_2,δεξιά συμπαγής ημιομάδα και I δεξιό ιδεώδες της X. Τότε υπάρχει ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες I_1 της X, με $I_1 \subseteq I$ (δηλαδή αν $I_2 \subseteq I_1$ και I_2 δεξιό ιδεώδες της X, τότε $I_2 = I_1$).*

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{C} = \{I_1 \subseteq X \mid I_1 \text{ μη κενό, συμπαγές δεξιό ιδεώδες της X, με } I_1 \subseteq I\}.$$

$\mathcal{C} \neq \emptyset$, διότι $X + x_0 = T_{x_0}(X) \in \mathcal{C}$ για $x_0 \in I$, αφού $X + x_0 \subseteq X + I \subseteq I$, και συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς. Αν $\mathcal{D} = \{I_j\}_{j \in J}$ είναι μια ολικά διατεταγμένη υποοικογένεια της $\mathcal{C}$, έχουμε ότι η $\mathcal{D}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, άρα αν $I_0 := \bigcap_{j \in J} I_j$ τότε $I_0 \neq \emptyset$, συμπαγές, και $I_0 \in \mathcal{C}$ διότι $I_0 \subseteq X$ και για $y \in I_0$ έχουμε $x + y \subseteq I_j$ για κάθε $j \in J$, $x \in X$, άρα $x + y \in I_0$ για κάθε $x \in X$, $y \in I_0$ δηλαδή $X + I_0 \subseteq I_0 \subseteq I$. Από Λήμμα $Zorn$, η $\mathcal{C}$ έχει ελαχιστικό στοιχείο , έστω I_1. Το I_1 είναι ελαχιστικό μη κενό, συμπαγές δεξιό ιδεώδες, καθώς αν $G \subseteq I_1$ με G δεξιό ιδεώδες, τότε για $x_0 \in G$ έχουμε $X + x_0 \subseteq G \subseteq I_1$ και $X + x_0$ συπαγές, άρα $X + x_0 = G = I_1$ αφού I_1 ελαχιστικό στοιχείο της $\mathcal{C}$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πρόταση 3.4.8. *Αν $(X, +)$ μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα, τότε κάθε ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες της είναι συμπαγές και είναι της μορφής $X + x_0$, για $x_0 \in X$.*

Απόδειξη. Έστω I ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες της X. Για $x_0 \in I$ έχουμε $X + x_0 \subseteq I$ και τότε $X + x_0 = I$ αφού $X + x_0$ είναι δεξιό ιδεώδες και I ελαχιστικό. Άρα $I = T_{x_0}(X)$ και είναι συμπαγές. □

Παρατήρηση 3.4.9. *Για $x_0 \in I$, $I + x_0 \subseteq I$, και επειδή $I + x_0$ δεξιό ιδεώδες της X, έχουμε $I + x_0 = I = X + x_0$, από ελαχιστικό χαρακτήρα του I.*

Πρόταση 3.4.10. *Αν I ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες της ημιομάδας $(X, +)$, τότε $I + x_0$ ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες της X για κάθε $x_0 \in X$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και $I_1 \subseteq I + x_0$, με I_1 δεξιό ιδεώδες της X. Θεωρούμε

$$A = \{x \in I \mid x + x_0 \in I_1\} \subseteq I.$$

Για $y \in I_1 \subseteq I + x_0$ έχουμε $y = x + x_0$ για κάποιο $x \in I$, άρα $x \in A$, και τότε $y \in A + x_0$. Αντιστρόφως, για $x \in A$ έχουμε ότι $x + x_0 \in I_1$, $x \in I$ και άρα $A + x_0 = I_1$. Για $x \in X$, $y \in A$ έχουμε $x + y \in X + I \subseteq I$ και $(x + y) + x_0 = x + (y + x_0) \in X + I_1 \subseteq I_1$ δηλαδή $x + y \in A$. Τα x, y επιλέχθηκαν τυχαία άρα $X + A \subseteq A$, δηλαδή A δεξιό ιδεώδες, με $A \subseteq I$ και άρα $A = I$ αφού I ελαχιστικό, και τότε $I_1 = A + x_0 = I + x_0$, δηλαδή $I + x_0$ ελαχιστικό. □

Ορισμός 3.4.11. *Έστω $(X, +)$ μια μη κενή T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα. Για x, $y \in X$ ταυτοδύναμα, ορίζουμε διάταξη:*

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x + y = y + x = x.$$

Πρόταση 3.4.12. *Έστω $(X, +)$ μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα και I ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες της X. Τότε, κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο του I είναι ελαχιστικό ως προς την διάταξη $\leq$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in I$ ώστε $x+x = x$ (υπάρχει πάντα τέτοιο αφού I συμπαγής δεξιά ημιομάδα). Αν $y \in X$, $y + y = y$, με $y \leq x$, τότε $x + y = y + x = y$ άρα $y = y + x \in X + I \subseteq I$. Από ελαχιστικό χαρακτήρα του I, έχουμε $I + y = I$. Το x είναι στοιχείο του I, άρα $x = x_1 + y$ για κάποιο $x_1 \in I$. Τότε έχουμε $y = x + y = (x_1 + y) + y = x_1 + (y + y) = x_1 + y = x$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.4.13. *Έστω $(X, +)$ μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα, x ταυτοδύναμο στοιχείο της X, και $S \subseteq X$ συμπαγές ώστε $S+x$ ημιομάδα. Τότε υπάρχει $y \in x + S + x$, με y ταυτοδύναμο και $y \leq x$.*

Απόδειξη. Έστω x_1 ταυτοδύναμο στοιχείο της $S + x$. Τότε, $x_1 = z + x$ για κάποιο $z \in S$. Θέτουμε $y = x + z + x \in x + S + x$ και έχουμε ότι $x + y = = x+(x+z+x) = x+z+x = y = (x+z+x)+x = y+x$ δηλαδή $y \leq x$ και $y+y = (x+z+x)+(x+z+x) = x+z+(x+x)+z+x = x+(z+x)+(z+x) = = x + (x_1 + x_1) = x + x_1 = y$ από προσεταιριστικότητα της πράξης $+$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 3.4.14. *Έστω $(X, +)$ μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα και x ταυτοδύναμο στοιχείο της X. Το x είναι ελαχιστικό στοιχείο αν και μόνο αν είναι στοιχείο ενός ελαχιστικού δεξιού ιδεώδους της X.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ευθύ, αφού το αντίστροφο έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.4.12. Έστω $x+x = x$ ελαχιστικό ταυτοδύναμο στοιχείο της X, και I ελαχιστικό συμπαγές δεξιό ιδεώδες. Τότε από Πρόταση 3.4.10. έχουμε ότι $I+x$ είναι ελαχιστικό συμπαγές δεξιό ιδεώδες, άρα και ημιομάδα. Από Πρόταση 3.4.13. υπάρχει $y \in I + x$ ώστε $y + y = y$, $y \leq x$. Άρα $x = y \in I + x$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό της πρότασης. □

Πρόταση 3.4.15. *Έστω $(X, +)$ μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα και I αμφίπλευρο ιδεώδες της X. Τότε κάθε ελαχιστικό δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες της X περιέχεται στο I.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν I_1 δεξιό ιδεώδες και I_2 αριστερό ιδεώδες της X, τότε $I_2+I_1 \subseteq I_2+X \subseteq I_2$ και $I_2+I_1 \subseteq X+I_1 \subseteq I_1$ άρα $I_2+I_1 \subseteq I_1 \cap I_2$ δηλαδή $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Άρα για κάθε I_1 ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες ισχύει ότι $I_1 \cap I \neq \emptyset$ και $I_1 \cap I$ δεξιό ιδεώδες με $I_1 \cap I \subseteq I_1$, και τότε $I_1 = I_1 \cap I \subseteq I$ αφού I_1 ελαχιστικό. □

Πόρισμα 3.4.16. *Έστω X μια μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα. Αν I αμφίπλευρο ιδεώδες της X, τότε κάθε ελαχιστικό ταυτοδύναμο στοιχείο της X περιέχεται στο I.*

Απόδειξη. Κάθε ελαχιστικό ταυτοδύναμο στοιχείο της X ανήκει σε κάποιο ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες (Πρόταση 3.4.14.), το οποίο από την προηγούμενη πρόταση θα περιέχεται στο I. □

3.5 Γενικευμένο Θεώρημα Carlson

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται ένα γενικευμένο Θεώρημα Carlson, που αναφέρεται σε ένα διαχωριστικό θεώρημα που αφορά μια τυχαία ημιομάδα και μια πεπερασμένη οικογένεια ομομορφισμών ορισμένη στην ημιομάδα αυτή. Το κλασικό Θεώρημα Carlson είναι η ειδική περίπτωση του προαναφερομένου θεωρήματος για την ημιομάδα των λέξεων με μεταβλητή σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο και για τους τελεστές αντικατάστασης της μεταβλητής με γράμματα του αλφαβήτου. Η απόδειξη που αναφέρουμε δόθηκε από την κ. Β.Φαρμάκη στο μεταπτυχιακό μάθημα της Θεωρίας Ramsey και εμπεριέχεται (ως ειδική περίπτωση) στο άρθρο της [9].

Ορισμός 3.5.1. *Έστω $(X,+_1)$, $(Y,+_2)$ δύο μη κενές ημιομάδες. Κάθε απεικόνιση $T: X \to Y$ ώστε $T(x +_1 y) = T(x) +_2 T(y)$ για κάθε x, $y \in X$ λέγεται* **ομομορφισμός** *(ή* **ομομορφισμός ημιομάδων***).*

Στα παρακάτω, για λόγους απλότητας, οι πράξεις που θα εμφανίζονται στις αντίστοιχες ημιομάδες θα συμβολίζονται με $+$ (χωρίς να αποκλείεται οι πράξεις αυτές να είναι διαφορετικές, για διαφορετικές ημιομάδες).

Παρατηρήσεις 3.5.2. *Έστω $(X,+)$, $(Y,+)$ δύο μη κενές ημιομάδες και $T: X \to Y$ ομομορφισμός. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*
1) $T(X)$ υποημιομάδα της Y.
2) Αν X' υποημιομάδα της X, τότε $T(X')$ υποημιομάδα της Y.
3) Αν X' δεξιό ιδεώδες της X (αντίστοιχα αριστερό, αμφίπλευρο), τότε $T(X')$

δεν είναι απαραίτητα δεξιό ιδεώδες της Y (αντίστοιχα αριστερό, αμφίπλευρο), αλλά είναι δεξιό ιδεώδες της $T(X)$ (αντίστοιχα αριστερό, αμφίπλευρο).
4) *Αν x ταυτοδύναμο στοιχείο της X, τότε $T(x)$ ταυτοδύναμο στοιχείο της Y.*
5) *Αν x, y ταυτοδύναμα στοιχεία της X, με $x \leq y$, τότε $T(x) \leq T(y)$.*

Πρόταση 3.5.3. *Έστω $(X,+)$, $(Y,+)$ δύο μη κενές ημιομάδες και $T : X \to Y$ ομομορφισμός, τότε $\mathfrak{B}T : \mathfrak{B}X \to \mathfrak{B}Y$ είναι συνεχής συνάρτηση και ομομορφισμός.*

Απόδειξη. Από Πρόταση 3.2.12. έχουμε ότι η $\mathfrak{B}T$ είναι συνεχής.

Η $\mathfrak{B}T$ είναι ομομορφισμός. Πράγματι, αν μ_1, $\mu_2 \in \mathfrak{B}X$, τότε $\mathfrak{B}T(\mu_1 + \mu_2) = (\mu_1 + \mu_2)_T = (\mu_1)_T + (\mu_2)_T = \mathfrak{B}T(\mu_1) + \mathfrak{B}T(\mu_2)$, καθώς αν $B \subseteq Y$ τυχόν, τότε $(\mu_1+\mu_2)_T(B) = (\mu_1+\mu_2)(T^{-1}(B)) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid x + y \in T^{-1}(B)\}) = 1\}) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid T(x) + T(y) \in B\}) = 1\})$, και $((\mu_1)_T + (\mu_2)_T)(B) = (\mu_1)_T(\{z \in Y \mid (\mu_2)_T(\{w \in Y \mid z + w \in B\}) = 1\}) = (\mu_1)_T(\{z \in Y \mid \mu_2(\{y \in X \mid z + T(y) \in B\}) = 1\}) = \mu_1(\{x \in X \mid \mu_2(\{y \in X \mid T(x) + T(y) \in B\}) = 1\})$, άρα ισότητα. □

Ορισμός 3.5.4. *Έστω $(X,+)$ ημιομάδα και $(Y,+)$ μη κενή υποημιομάδα της. Θέτουμε*

$$\widetilde{\mathfrak{B}Y} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(Y) = 1\}.$$

Πρόταση 3.5.5. *Έστω $(X,+)$ ημιομάδα και $(Y,+)$ μη κενή υποημιομάδα της. Τότε:*
i) $\widetilde{\mathfrak{B}Y} = \mathfrak{B}I(\mathfrak{B}Y)$, όπου $I : Y \to X$, με $I = id_Y$ (η ταυτοτική συνάρτηση στο Y).
ii) $\widetilde{\mathfrak{B}Y}$ είναι μη κενή, συμπαγής υποημιομάδα του $\mathfrak{B}X$.
iii) $\widetilde{\mathfrak{B}Y}$ είναι δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες του $\mathfrak{B}X$, αν Y είναι δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες της X.

Απόδειξη. *i)* Αν $\mu \in \mathfrak{B}I(\mathfrak{B}Y) \subseteq \mathfrak{B}X$, θα είναι $\mu = \mathfrak{B}I(\mu_1)$, όπου $\mu_1 \in \mathfrak{B}Y$ άρα $\mu(Y) = \mathfrak{B}I(\mu_1)(Y) = \mu_1(I^{-1}(Y)) = \mu_1(Y) = 1$. Αντίστροφα, αν $\mu \in \mathfrak{B}X$ ώστε $\mu(Y) = 1$, ορίζουμε $\mu_1 \in \mathfrak{B}Y$, με $\mu_1(B) = \mu(B)$ για κάθε $B \subseteq Y$. Τότε $\mathfrak{B}I(\mu_1) = \mu$ καθώς $\mathfrak{B}I(\mu_1)(A) = \mu_1(A \cap Y) = \mu(A \cap Y) = \mu(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

ii) $\widetilde{\mathfrak{B}Y}$ είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathfrak{B}X$ ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, και ημιομάδα, ως γραμμική εικόνα ημιομάδας.

iii) Έστω $\mu_1 \in \widetilde{\mathfrak{B}Y}$ και $\mu \in \mathfrak{B}X$. Αν Y είναι δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες της X, τότε $\mu + \mu_1 \in \widetilde{\mathfrak{B}Y}$. Πράγματι, $(\mu + \mu_1)(Y) = \mu(\{x \in X \mid$

$\mu_1(\{y \in Y \mid x + y \in Y\}) = 1\}) = \mu(\{x \in X \mid \mu_1(Y) = 1\}) = \mu(X) = 1$ (αντίστοιχα $\mu_1 + \mu(Y) = \mu_1(\{x \in Y \mid \mu(\{y \in X \mid x + y \in Y\}) = 1\}) = = \mu_1(\{x \in Y \mid \mu(X) = 1\}) = \mu_1(Y) = 1)$. □

Θεώρημα 3.5.6. *Έστω $(X, +)$ μη κενή, T_2, δεξιά συμπαγής ημιομάδα, V ένα συμπαγές αμφίπλευρο ιδεώδες της X, $T_i : X \to X$ συνεχείς, ομομορφισμοί για κάθε $i \in J$, όπου J αυθαίρετο σύνολο δεικτών, και C μη κενή συμπαγής υποημιομάδα της X ώστε:*
i) $T_i(x) = x$ για κάθε $x \in C$, και
ii) $V_1 = \{x \in V \mid T_i(x) \in C$ για κάθε $i \in J\}$ μη κενό υποσύνολο του V.
Τότε, για κάθε ελαχιστικό ταυτοδύναμο στοιχείο ϑ της C, υπάρχει $\alpha \in V_1$, ώστε $\alpha + \alpha = \alpha$, $\alpha \leq \vartheta$, και $T_i(\alpha) = \vartheta$ για κάθε $i \in J$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $V_1 = V \cap (\bigcap_{i \in J} T_i^{-1}(C)) \subseteq V \subseteq X$ συμπαγής ημιομάδα. Θεωρούμε $\vartheta \in C$, $\vartheta + \vartheta = \vartheta$, ελαχιστικό στην C. Τότε $V_1 + \vartheta$ συμπαγής ημιομάδα. Η $V_1 + \vartheta$ είναι ημιομάδα αφού αν $v_1^1, v_1^2 \in V_1$ τότε $(v_1^1 + \vartheta) + (v_1^2 + \vartheta) \in V$, καθώς V αμφίπλευρο ιδεώδες. Ακόμα, $v_1^1 + \vartheta + v_1^2 \in V$ και $T_i(v_1^1 + \vartheta + v_1^2) = = T_i(v_1^1) + T_i(\vartheta) + T_i(v_1^2) = T_i(v_1^1) + \vartheta + T_i(v_1^2) \in C$ δηλαδή $v_1^1 + \vartheta + v_1^2 \in V_1$ και άρα $(v_1^1 + \vartheta) + (v_1^2 + \vartheta) = (v_1^1 + \vartheta + v_1^2) + \vartheta \in V_1 + \vartheta$. Ακόμα, $V_1 + \vartheta = T_\vartheta(V_1)$, και άρα συμπαγές. Από Πρόταση 3.4.13. υπάρχει $\alpha \in \vartheta + V_1 + \vartheta \subseteq V$ (τότε $\alpha \in V_1$), ώστε $\alpha + \alpha = \alpha$ και $\alpha \leq \vartheta$. Τότε $T_i(\alpha) \leq T_i(\vartheta) = \vartheta$ για κάθε $i \in J$ άρα $T_i(\alpha) = \vartheta$ για κάθε $i \in J$ αφού $T_i(\alpha) \in C$ και ϑ ελαχιστικό. □

Θεώρημα 3.5.7. *Έστω $(X, +)$ μη κενή ημιομάδα, V αμφίπλευρο ιδεώδες της X, $T_i : X \to X$ ομομορφισμοί για κάθε $i \in J$, όπου J πεπερασμένο σύνολο δεικτών, και C μη κενή υποημιομάδα της X ώστε:*
i) $T_i(x) = x$ για κάθε $x \in C$, και
ii) $V_1 = \{x \in V \mid T_i(x) \in C$ για κάθε $i \in J\}$ μη κενό υποσύνολο του V.
Τότε, για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο μ_1 της $\mathfrak{B}X$ ελαχιστικό στην $\widetilde{\mathfrak{B}C}$, υπάρχει $\mu \in \widetilde{\mathfrak{B}V_1}$ ταυτοδύναμο στοιχείο της $\mathfrak{B}X$ ώστε $\mu \leq \mu_1 = \mathfrak{B}T_i(\mu)$ για κάθε $i \in J$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathfrak{B}X$ μη κενή, T_2, συμπαγής δεξιά ημιομάδα, $\mathfrak{B}T_i : \mathfrak{B}X \to \mathfrak{B}X$, $i \in J$ συνεχείς, ομομορφισμοί, $\emptyset \neq \widetilde{\mathfrak{B}C} \subseteq \mathfrak{B}X$ συμπαγής ημιομάδα και $\widetilde{\mathfrak{B}V}$ αμφίπλευρο ιδεώδες της $\mathfrak{B}X$ (Πρόταση 3.5.5.). Ισχύουν:
i) $\mathfrak{B}T_i(\mu) = \mu$ για κάθε $\mu \in \widetilde{\mathfrak{B}C}$. Πράγματι, για κάθε $A \subseteq X$, $\mathfrak{B}T_i(\mu)(A) = = \mu(T_i^{-1}(A)) = \mu(C \cap T_i^{-1}(A)) = \mu(C \cap T_i^{-1}(A \cap C)) = \mu(A \cap C) = \mu(A)$, αφού η T_i είναι ταυτοτική στο σύνολο C.
ii) Το $\widetilde{\mathfrak{B}V_1}$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathfrak{B}X$, γιατί V_1 μη κενό, και μάλιστα $\widetilde{\mathfrak{B}V_1} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(V_1) = 1\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(\{x \in V \mid T_i(x) \in C$ για κάθε $i \in J\}) = 1\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(V) = 1, \mu(\{x \in X \mid T_i(x) \in C\}) = 1$

για κάθε $i \in J\} = \{\mu \in \mathfrak{B}X \mid \mu(V) = 1,\ \mu(T_i^{-1}(C)) = 1$ για κάθε $i \in J\} =$
$= \{\mu \in \widetilde{\mathfrak{B}V} \mid \mathfrak{B}T_i(\mu) \in \mathfrak{B}X,\ \mathfrak{B}T_i(\mu)(C) = 1$ για κάθε $i \in J\} = \{\mu \in \widetilde{\mathfrak{B}V} \mid \mathfrak{B}T_i(\mu) \in \widetilde{\mathfrak{B}C}$ για κάθε $i \in J\}$.

Από το Θεώρημα 3.5.6. για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο μ_1 της $\mathfrak{B}X$ ελαχιστικό στην $\widetilde{\mathfrak{B}C}$, υπάρχει $\mu \in \widetilde{\mathfrak{B}V_1} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}V}$ ταυτοδύναμο στοιχείο της $\mathfrak{B}X$ ώστε $\mu \leq \mu_1 = \mathfrak{B}T_i(\mu)$ για κάθε $i \in J$. □

Θεώρημα 3.5.8 (Γενικευμένο Θεώρημα Carlson). *Έστω $(X,+)$ μια μη κενή ημιομάδα, V αμφίπλευρο ιδεώδες της X, $T_i : X \to X$ ομομορφισμοί για κάθε $1 \leq i \leq l$, $l \in \mathbb{N}^*$, όπου $T_1 = id_X$ ο ταυτοτικός τελεστής, και C μη κενή υποημιομάδα της X ώστε:*
i) $T_i(x) = x$ για κάθε $x \in C$, και
ii) $V_1 = \{x \in V \mid T_i(x) \in C$ για κάθε $2 \leq i \leq l\}$ μη κενό υποσύνολο του V.
Αν $V = \bigcup_{j=1}^{r_1} V_j$ και $C = \bigcup_{j=1}^{r_2} C_j$ για $r_1,\ r_2 \in \mathbb{N}^*$, τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ και $1 \leq j_1 \leq r_1$, $1 \leq j_2 \leq r_2$ ώστε να ισχύουν:

$$Vspan(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{\sum_{j=1}^{k} T_{i_j}(x_{n_j}) \mid k \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < n_2 ... < n_k \in \mathbb{N}^*,\ i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., l\} \text{ και υπάρχει } i_j = 1 \text{ για } 1 \leq j \leq k\} \subseteq V_{j_1},$$

και

$$Span(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{\sum_{j=1}^{k} T_{i_j}(x_{n_j}) \mid k \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < n_2 ... < n_k \in \mathbb{N}^*,\ i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., l\}\} \subseteq C_{j_2}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.5.7. έχουμε ότι υπάρχει $\mu \in \widetilde{\mathfrak{B}V}$ ταυτοδύναμο στοιχείο του $\mathfrak{B}X$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες :
1) $\mu \leq \mathfrak{B}T_i(\mu)$ για κάθε $2 \leq i \leq l$, και
2) $\mathfrak{B}T_i(\mu) = \mu_1$ για κάθε $2 \leq i \leq l$, όπου μ_1 ταυτοδύναμο στοιχείο του $\widetilde{\mathfrak{B}C}$.

Για κάθε $A \subseteq V$ με $\mu(A) = 1$ και $B \subseteq C$ με $\mu_1(B) = 1$ ισχύουν οι σχέσεις:
(1) $(\mu + \mu)(A) = \mu(A) = 1$,
ή ισοδύναμα, $\mu(\{x \in A \mid \mu(\{y \in A \mid x + y \in A\}) = 1\}) = 1$,
(2) για κάθε $2 \leq i \leq l$, $(\mathfrak{B}T_i(\mu) + \mu)(A) = \mu(A) = 1$, ή ισοδύναμα,
για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mu(\{x \in A \mid \mu(\{y \in A \mid T_i(x) + y \in A\}) = 1\}) = 1$,
(3) για κάθε $2 \leq i \leq l$, $(\mu + \mathfrak{B}T_i(\mu))(A) = \mu(A) = 1$, ή ισοδύναμα,
για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mu(\{x \in A \mid \mu(\{y \in A \mid x + T_i(y) \in A\}) = 1\}) = 1$,
(4) για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mathfrak{B}T_i(\mu)(B) = \mu_1(B) = 1$,
ή ισοδύναμα, για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mu(\{x \in A \mid T_i(x) \in B\}) = 1$,
(5) $(\mu_1 + \mu_1)(B) = \mu_1(B) = 1$, ή ισοδύναμα, $(\mathfrak{B}T_i(\mu) + \mu_1)(B) = \mu_1(B) = 1$,

δηλαδή $\mu(\{x \in A \mid \mu_1(\{y \in B \mid T_i(x) + y \in B\}) = 1\}) = 1$, και
(6) $(\mu + \mu_1)(A) = \mu(A) = 1$,
ή ισοδύναμα, $\mu(\{x \in A \mid \mu_1(\{y \in B \mid x + y \in A\}) = 1\}) = 1$.

Κατασκευή της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Αφού $\mu(V) = 1$ και $\mu_1(C) = 1$, υπάρχουν $1 \leq j_1 \leq r_1$, $1 \leq j_2 \leq r_2$ με $\mu(V_{j_1}) = 1$ και $\mu_1(C_{j_2}) = 1$.

Βήμα 1ο: Θέτουμε $A_1 = V_{j_1}$, $B_1 = C_{j_2}$ και σύμφωνα με τις σχέσεις $(1)-(6)$ επιλέγουμε $x_1 \in A_1$ ώστε: $T_i(x_1) \in B_1$ για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mu(A_2) = 1$

όπου $A_2 = \{y \in A_1 \mid x_1{+}y \in A_1,\ T_i(x_1){+}y \in A_1,\ x_1{+}T_i(y) \in A_1$ για κάθε

$2 \leq i \leq l\} \subseteq A_1$, και $\mu_1(B_2) = 1$, όπου

$$B_2 = \{y \in B_1 \mid x_1 + y \in A_1,\ T_i(x_1) + y \in B_1 \text{ για κάθε } 2 \leq i \leq l\} \subseteq B_1.$$

Βήμα 2ο: Σύμφωνα με τις σχέσεις $(1) - (6)$ επιλέγουμε $x_2 \in A_2$ ώστε:
$T_i(x_2) \in B_2$ για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mu(A_3) = 1$

όπου $A_3 = \{y \in A_2 \mid x_2{+}y \in A_2,\ T_i(x_2){+}y \in A_2,\ x_2{+}T_i(y) \in A_2$ για κάθε

$2 \leq i \leq l\} \subseteq A_2$, και $\mu_1(B_3) = 1$, όπου

$$B_3 = \{y \in B_2 \mid x_2 + y \in A_2,\ T_i(x_2) + y \in B_2 \text{ για κάθε } 2 \leq i \leq l\} \subseteq B_2.$$

Έστω ότι επαγωγικά έχουμε ορίσει $x_1, x_2, ..., x_n$ και $A_{n+1} \subseteq ... \subseteq A_2 \subseteq A_1$, $B_{n+1} \subseteq ... \subseteq B_2 \subseteq B_1$ ώστε $\mu(A_k) = 1$, $\mu_1(B_k) = 1$ για κάθε $1 \leq k \leq n+1$.

Βήμα $(n{+}1)$ο: Επιλέγουμε $x_{n+1} \in A_{n+1}$ σύμφωνα με τις σχέσεις $(1) - (6)$ ώστε: $T_i(x_{n+1}) \in B_{n+1}$ για κάθε $2 \leq i \leq l$, $\mu(A_{n+2}) = 1$, όπου

$A_{n+2} = \{y \in A_{n+1} \mid x_{n+1} + y \in A_{n+1},\ T_i(x_{n+1}) + y \in A_{n+1},\ x_{n+1} + T_i(y)$

$\in A_{n+1}$ για κάθε $2 \leq i \leq l\} \subseteq A_{n+1}$, και $\mu_1(B_{n+2}) = 1$,

όπου $B_{n+2} = \{y \in B_{n+1} \mid x_{n+1}{+}y \in A_{n+1},\ T_i(x_{n+1}){+}y \in B_{n+1}$ για κάθε

$2 \leq i \leq l\} \subseteq B_{n+1}$.

Θα δείξουμε ότι $Vspan(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1 = V_{j_1}$ και $span(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_1 = C_{j_2}$.

Για κ=1 έχουμε $x_n \in A_n \subseteq A_1$, $T_i(x_n) \in B_n \subseteq B_1$. Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για m, θα δείξουμε για $m+1$.
Έστω $n_1 < ... < n_m < n_{m+1} \in \mathbb{N}^*$ και $i_1, ..., i_m, i_{m+1} \in \{1, 2, ..., l\}$.
Αν $1 \in \{i_2, ..., i_m, i_{m+1}\}$, τότε $u = T_{i_2}(x_{n_2}) + ... + T_{i_{m+1}}(x_{n_{m+1}}) \in A_{n_2} \subseteq A_{n_1+1}$ από επαγωγική υπόθεση. Άρα,

$$T_{i_1}(x_{n_1}) + u = T_{i_1}(x_{n_1}) + T_{i_2}(x_{n_2}) + ... + T_{i_{m+1}}(x_{n_{m+1}}) \in A_{n_1} \subseteq A_1.$$

Αν $1 \notin \{i_2, ..., i_m, i_{m+1}\}$, τότε $z = T_{i_2}(x_{n_2}) + ... + T_{i_{m+1}}(x_{n_{m+1}}) \in B_{n_2} \subseteq B_{n_1+1}$ από επαγωγική υπόθεση. Αν $i_1 = 1$, τότε

$$x_{n_1} + z = T_{i_1}(x_{n_1}) + T_{i_2}(x_{n_2}) + ... + T_{i_{m+1}}(x_{n_{m+1}}) \in A_{n_1} \subseteq A_1.$$

Αν $i_1 \in \{2, ..., l\}$, τότε

$$T_{i_1}(x_{n_1}) + z = T_{i_1}(x_{n_1}) + T_{i_2}(x_{n_2}) + ... + T_{i_{m+1}}(x_{n_{m+1}}) \in B_{n_1} \subseteq B_1,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ως ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος έχουμε το παρακάτω θεώρημα του Carlson για την ημιομάδα των λέξεων ως προς ένα πεπερασμένο αλφάβητο.

Ορισμός 3.5.9. *Έστω σύνολο $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ και στοιχείο $u \notin \Sigma$. Ορίζουμε*

$$C = W(\Sigma) = \{w = w_1 w_2 \cdots w_l \mid l \in \mathbb{N}^*, w_i \in \Sigma,\ i = 1, ..., k\}$$

τις **λέξεις** *με στοιχεία από το* **αλφάβητο** *Σ.*

Ορίζουμε $V = W(\Sigma, u) := W(\Sigma \cup \{u\}) \setminus W(\Sigma)$ τις **λέξεις με μεταβλητή**, *που συμβολίζουμε με $w(u)$.*

Θέτουμε $A = W(\Sigma \cup \{u\})$, δηλαδή $A = V \cup C$, και ορίσουμε στο A μια πράξη $*$ ως εξής: για $w_1 = w_1^1 w_2^1 \cdots w_l^1$, $w_2 = w_1^2 w_2^2 \cdots w_m^2$, θέτουμε

$$w_1 * w_2 = w_1^1 w_2^1 \cdots w_l^1 w_1^2 w_2^2 \cdots w_m^2.$$

Παρατήρηση 3.5.10. *Έστω Σ μη κενό, πεπερασμένο αλφάβητο και $u \notin \Sigma$. Θέτουμε $X = W(\Sigma \cup \{u\})$, $V = W(\Sigma \cup \{u\}) \setminus W(\Sigma)$ και $C = W(\Sigma)$. Παρατηρούμε ότι V αμφίπλευρο ιδεώδες της X και C υποημιομάδα της X. Ορίζουμε $T_i : X \to X$, για κάθε $i \in \Sigma$ ώστε: $T_i(w(u)) = w(i)$ για $w(u) \in V$ και $T_i(w) = w$ για $w \in C$. Τότε είναι προφανές ότι T_i είναι ομομορφισμοί (με πράξη την $*$) και ισχύουν:*
i) $T_i|_C = id|_C$
ii) $V_1 = \{w \in V \mid T_i(w) \in C$ για κάθε $i \in \Sigma\} = V \neq \emptyset$, αφού για κάθε $w \in V$ ισχύει $T_i(w) \in C$.

Θεώρημα 3.5.11. *(Carlson,1988 [3]). Έστω Σ μη κενό, πεπερασμένο αλφάβητο, $u \notin \Sigma$ και $T_u := id_{W(\Sigma \cup \{u\})}$. Αν $V = W(\Sigma \cup \{u\}) \setminus W(\Sigma) = \bigcup_{i=1}^k B_i$, $k \in \mathbb{N}^*$ και $C = W(\Sigma) = \bigcup_{i=1}^l A_i$, $l \in \mathbb{N}^*$, τότε υπάρχει* *ακολουθία λέξεων με μεταβλητή* $(w_n(u))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ *και* $1 \leq k_0 \leq k,\ 1 \leq l_0 \leq l$ *ώστε*

$$\{T_{i_1}(w_{n_1})*...*T_{i_m}(w_{n_m}) \mid\ m \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < ... < n_m \in \mathbb{N}^*,\ i_1,...,i_m \in\ \Sigma\cup\{u\}$$

$$\text{και υπάρχει } 1 \leq j \leq m \ \text{ ώστε } i_j = u\} \subseteq B_{k_0}, \quad \text{και}$$

$$\{T_{i_1}(w_{n_1})*...*T_{i_m}(w_{n_m}) \mid\ m \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < ... < n_m \in \mathbb{N}^*,\ i_1,...,i_m \in\ \Sigma\} \subseteq A_{l_0}.$$

Απόδειξη. Άμεση από Θεώρημα 3.5.8. και Παρατήρηση 3.5.10. □

Πόρισμα 3.5.12 (Θεώρημα Hindman)**.** *Έστω* $\mathbb{N}^* = \bigcup_{i=1}^r C_i,\ r \in \mathbb{N}^*$, *διαμέριση των θετικών φυσικών αριθμών. Τότε υπάρχει ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^*$ *και* $1 \leq i_0 \leq r$, *ώστε*

$$FS(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{\sum_{i\in F} x_i \mid\ F \in [\mathbb{N}^*]^{<\omega}_{>0}\} \subseteq C_{i_0}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ γράφεται μοναδικά στην μορφή $n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i 2^{i-1}$ όπου $\alpha_i \in \{0,1\},\ 1 \leq i \leq k_n - 1$ και $\alpha_{k_n} = 1$.

Άρα για $\Sigma = \{0,1\}$ αλφάβητο, θεωρώντας απεικόνιση $f : \mathbb{N}^* \to W(\Sigma)$ με $f(n) = \alpha_1...\alpha_{k_n-1}1$, όπου $\alpha_1...\alpha_{k_n-1}1$ η μοναδική λέξη που αναπαριστά το n έχουμε ότι η f είναι 1-1 και επί. Άρα το αποτέλεσμα που καλούμαστε να αποδείξουμε είναι ισοδύναμο με το εξής:

"Αν $\Sigma = \{0,1\}$ και $W(\Sigma) = \bigcup_{i=1}^r C_i',\ r \in \mathbb{N}^*$, όπου $C_i' = f(C_i)$, τότε υπάρχει $1 \leq i_0 \leq r$ και ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $W(\Sigma)$ ώστε

$$\{w_{n_1} * ... * w_{n_k} :\ k \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < ... < n_k \in \mathbb{N}^*\} \subseteq C_{i_0}' \text{"}$$

το οποίο είναι άμεσο συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.5.11. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.6 Θεωρήματα van der Waerden και Hales-Jewett

Στην τελευταία αυτή παράγραφο του κεφαλαίου, αποδεικνύουμε τα θεωρήματα των van der Waerden και Hales-Jewett, καθώς και μια γενίκευση του τελευταίου, ως συνέπειες του θεωρήματος του Carlson (Θεώρημα 3.5.11.).

Ορισμός 3.6.1. *Έστω* Σ *μη κενό, πεπερασμένο αλφάβητο,* $n \in \mathbb{N}^*$ *και* $u \notin \Sigma$. *Ορίζουμε*

$$W(\Sigma; n) = \{w = w_1 w_2 \cdots w_n \mid\ w_i \in \Sigma,\ i = 1, ..., n\}$$

τις λέξεις με στοιχεία από το αλφάβητο Σ *με* **μήκος** n.

Ορίζουμε $W(\Sigma, u; n) := W(\Sigma \cup \{u\}; n) \setminus W(\Sigma; n)$ *τις λέξεις με μεταβλητή μήκους* n, *που συμβολίζουμε με* $w(u)$.

Θεώρημα 3.6.2 (Γενικευμένο Θεώρημα Hales-Jewett). *Έστω Σ μη κενό, πεπερασμένο αλφάβητο, r, $m \in \mathbb{N}^*$ και $u \notin \Sigma$. Τότε, υπάρχει $n \equiv n(\Sigma, m, r) \in \mathbb{N}^*$ ώστε αν $W(\Sigma; n) = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, υπάρχουν $t_1, ..., t_m \in W(\Sigma, u)$ με $t_1 * ... * t_m \in W(\Sigma, u; n)$ ώστε για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$ να ισχύει*

$$t_1(i_1) * ... * t_m(i_m) \in C_{i_0} \text{ για κάθε } i_1, ..., i_m \in \Sigma.$$

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα για κάποιο $m \in \mathbb{N}^*$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει διαμέριση $W(\Sigma; n) = \bigcup_{i=1}^{r} C_i^n$ ώστε κάθε $t_1, ..., t_m \in W(\Sigma, u)$ με $t_1 * ... * t_m \in W(\Sigma, u; n)$ δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα. Έστω $C_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_i^n$ για $1 \leq i \leq r$. Τότε $W(\Sigma) = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ και άρα από το Θεώρημα Carlson υπάρχει $(w_n(u))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W(\Sigma; u)$ και $1 \leq i_0 \leq r$ ώστε

$$w_1(i_1) * ... * w_m(i_m) \in C_{i_0} \quad \text{για κάθε } i_1, ..., i_m \in \Sigma.$$

Έστω n το μήκος της $w_1 * ... * w_m$, τότε $w_1(i_1) * ... * w_m(i_m) \in C_{i_0}^n$ για κάθε $i_1, ..., i_m \in \Sigma$, άτοπο. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.6.2. είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.6.3. *(Hales-Jewett,1963 [16]). Έστω Σ μη κενό, πεπερασμένο αλφάβητο, $r \in \mathbb{N}^*$ και $u \notin \Sigma$. Τότε, υπάρχει $n \equiv n(\Sigma, r) \in \mathbb{N}^*$ ώστε αν $W(\Sigma; n) = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, υπάρχει $t \in W(\Sigma, u; n)$ ώστε για κάποιο $1 \leq i_0 \leq r$ να ισχύει*

$$t(i) \in C_{i_0} \text{ για κάθε } i \in \Sigma.$$

Θεώρημα 3.6.4. *(van der Waerden,1927 [29]). Για κάθε m, $r \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $k \equiv k(m, r) \in \mathbb{N}^*$, ώστε αν $\{0, 1, ..., k\} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, υπάρχει C_{i_0}, $1 \leq i_0 \leq r$ που περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους m.*

Απόδειξη. Προφανώς έχει νόημα να εξετάσουμε την περίπτωση $m \geq 2$. Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1, ..., m-1\}$, $u \notin \Sigma$, και έστω $n \equiv n(\Sigma, r)$ από το Θεώρημα Hales-Jewett. Θέτουμε $k = n(m-1)$. Αν $\{0, 1, ..., k\} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, θεωρώντας

$$C_i' = \{w = w_1 ... w_n \in W(\Sigma; n) \mid w_1 + ... + w_n \in C_i\}$$

έχουμε ότι $W(\Sigma; n) = \bigcup_{i=1}^{r} C_i'$. Άρα από Θεώρημα Hales-Jewett υπάρχει t με $t = t_1 ... t_n \in W(\Sigma, u; n)$ και $1 \leq i_0 \leq r$ ώστε $t(i) \in C_{i_0}'$ για κάθε $i \in \Sigma$. Τότε, αν b είναι ο πληθάριθμος του συνόλου $\{1 \leq i \leq n \mid t_i = u\}$ και $\alpha = \sum \{t_i \mid 1 \leq i \leq n, \ t_i \in \Sigma\}$ έχουμε ότι: $\alpha, \alpha + b, ..., \alpha + (m-1)b \in C_{i_0}$, που είναι η ζητούμενη αριθμητική πρόοδος. □

Κεφάλαιο 4

Δυναμικά Συστήματα - Εργοδικότης

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η έννοια του δυναμικού συστήματος σε ένα χώρο μέτρου πιθανότητας (Παράγραφος 4.1). Αποδεικνύονται κλασικά θεμελιώδη εργοδικά θεωρήματα για τυχαία δυναμικά συστήματα, όπως τα Θεωρήματα Birkoff (Θεώρημα 4.2.4.), Yosida (Θεώρημα 4.2.8.) και Poincaré (Θεώρημα 4.2.13.). Επίσης, ορίζονται και χαρακτηρίζονται (Παράγραφος 4.3) τα εργοδικά δυναμικά συστήματα.

4.1 Δυναμικά Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή δίδεται ο ορισμός ενός δυναμικού συστήματος σε ένα χώρο μέτρου πιθανότητας και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές του.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας. Μια συνάρτηση $\varphi : X \to X$ λέμε ότι* **διατηρεί το μέτρο** *μ αν είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και ικανοποιεί την σχέση: $\mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι σε ένα χώρο μέτρου πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$ δεν είναι εν γένει αλήθεια ότι μια συνάρτηση $\varphi : X \to X$ που διατηρεί το μέτρο μ ικανοποιεί τη σχέση $\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Πράγματι, η $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ που ορίζεται από τον τύπο $\varphi(x) = 4x(mod 1)$ διατηρεί το μέτρο μ (Lebesque) αλλά για παράδειγμα $\mu(\varphi([0.001, 0.002])) = 4\mu([0.001, 0.002])$.

Ορισμός 4.1.2. **Δυναμικό σύστημα** *είναι μία τετράδα Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$, όπου X μη κενό σύνολο, η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X, μ μέτρο* *πιθανότητας στο X και φ μια συνάρτηση που διατηρεί το μέτρο.*

Θα λέμε ότι το Φ είναι **αντιστρέψιμο** *αν η φ είναι 1-1, επί και η φ^{-1} είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.*

Παραδείγματα 4.1.3. *1) $X = [0,1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1))$ (τα Borel υποσύνολα του $[0,1)$), $\mu = \lambda|_{\mathcal{A}}$ (ο περιορισμός του μέτρου Lebesgue στην $\mathcal{A}$) και $\varphi : [0,1) \to [0,1)$ με $\varphi(x) = x + \alpha(mod1)$ για α σταθερό, $0 < \alpha < 1$. Τότε το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι ένα αντιστρέψιμο δυναμικό σύστημα. Πράγματι, η συνάρτηση φ είναι 1-1 αφού αν $\varphi(x) = \varphi(y)$ για $x,\ y \in [0,1)$ τότε $x + \alpha \equiv y + \alpha(mod1)$ άρα $x \equiv y(mod1)$ δηλαδή $x = y$.*

Η φ είναι επί διότι για $y \in [0,1)$ θεωρούμε $x = \begin{cases} y-\alpha, & \alpha \leq y \\ y-\alpha+1, & \alpha > y \end{cases}$ οπότε $x \in [0,1)$ και $\varphi(x) = y$.

Οι φ και φ^{-1} είναι μετρήσιμες συναρτήσεις διότι αντιστρέφουν διαστήματα σε (εν γένει) ενώσεις διαστημάτων και ως γνωστόν η $\mathcal{A}$ παράγεται από τα ανοικτά διαστήματα του $[0,1)$. Επειδή η φ είναι αντιστρέψιμη, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αυτό ισχύει εφόσον η φ μεταφέρει το τυχόν διαστημα του $[0,1)$ σε (εν γένει) ενώσεις διαστημάτων με άθροισμα μηκών ίσο με το μήκος του αρχικού διαστήματος.

2) Μετασχηματισμοί $Shift$.

Έστω $k \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $X_n = \{0,1,...,k-1\}$, $\mathcal{A}_n$ την κλάση όλων των υποσυνόλων του X_n και μ_n μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{A}_n$, με $\mu_n(\{j\}) = p_{n,j}$ για κάθε $j \in X_n$, δηλαδή $\sum_{j=0}^{k-1} p_{n,j} = 1$. Θεωρούμε ως χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu) := \times_{n=0}^{\infty}(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$,το άπειρο γινόμενο, (δηλαδή $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$, $\mathcal{A} = \otimes_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n$, $\mu = \times_{n=0}^{\infty}\mu_n$). Ο X αποτελείται από ακολουθίες. Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα κυλινδρικά σύνολα, δηλαδή σύνολα της μορφής

$$C = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \mid (x_{n_1}, ..., x_{n_l}) \in A\} =$$

$$= \bigcup_{(s_1,...,s_l)\in A} \bigcap_{j=1}^{l} \{x \in X \mid x_{n_j} = s_j\},\ \text{όπου } l \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < ... < n_l \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$A \subseteq \prod_{i=1}^{l} X_{n_i}$. Ορίζουμε το μέτρο μ στην $\mathcal{A}$, ορίζοντας για κάθε κυλινδρικό σύνολο C, όπως παραπάνω,

$$\mu(C) = \sum_{(s_1,...,s_l)\in A} \prod_{j=1}^{l} p_{n_j,\,s_j}.$$

Το προηγούμενο ορίζεται καλά από Πρόταση 2.3.15. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi : X \to X$, όπου για $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζουμε $\varphi(x) = y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι για το τυχόν κυλινδρικό σύνολο C,

$$C = \bigcup_{(s_1,\dots,s_l)\in A}\bigcap_{j=1}^{l}\{x \in X \mid \ x_{n_j} = s_j\},\ l \in \mathbb{N}^*,\ n_1 < \dots < n_l \in \mathbb{N},\ A \subseteq \prod_{i=1}^{l} X_{n_i}$$

$$\textit{ισχύει}\ \ \varphi^{-1}(C) = \bigcup_{(s_1,\dots,s_l)\in A}\bigcap_{j=1}^{l}\varphi^{-1}(\{y \in X \mid \ y_{n_j} = s_j\}) =$$

$$= \bigcup_{(s_1,\dots,s_l)\in A}\bigcap_{j=1}^{l}\{x \in X \mid \ x_{n_j+1} = s_j\}.$$

Άρα η φ αντιστρέφει κυλινδρικά σύνολα σε κυλινδρικά και άρα είναι μετρήσιμη (αφού τα κυλινδρικά σύνολα παράγουν την σ-άλγεβρα γινόμενο). Προφανώς, η φ διατηρεί το μέτρο αν και μόνο αν $p_{n,j} = p_j$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αντίστοιχα, μπορούμε να θεωρήσουμε το αμφίπλευρο άπειρο γινόμενο ως εξής: $(X', \mathcal{A}', \mu') := \times_{n=-\infty}^{\infty}(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ και συνάρτηση $\varphi' : X' \to X'$, με $\varphi'(x) = y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ για $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $y_n = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε, ισχύουν τα προηγούμενα και παρατηρούμε ότι η φ' είναι αντιστρέψιμη ενώ η φ είναι k προς 1.

Ορισμός 4.1.4. *Αν Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα, τότε η φ επάγει ένα τελεστή $T_\varphi : \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) ώστε για κάθε $f : X \to \mathbb{K}$, $x \in X$ να ισχύει $(T_\varphi f)(x) = f(\varphi(x))$.*

Ιδιότητες του T_φ.

$i)$ Ο T_φ είναι γραμμικός.

$ii)$ Για κάθε $f : X \to \mathbb{K}$ ισχύει $|T_\varphi f| = T_\varphi |f|$.

$iii)$ Για κάθε $f : X \to \mathbb{K}$ ισχύει $\overline{T_\varphi f} = T_\varphi \overline{f}$ (όπου $\overline{\alpha}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του α).

$iv)$ Για $f : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, η $T_\varphi f$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

$v)$ Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι μ-ολοκληρώσιμη τότε και η $T_\varphi f$ είναι μ-ολοκληρώσιμη και μάλιστα $\int T_\varphi f d\mu = \int f d\mu$.

$vi)$ Αν $f : X \to \mathbb{K}$ με $f \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $T_\varphi f \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$

$vii)$ $T_\varphi(1) = 1$ $\mu - \sigma.\pi.$ (όπου 1 η σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$ συνάρτηση 1).

$viii)$ Αν η φ αντιστρέψιμη τότε και ο T_φ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$(T_\varphi)^{-1} = T_{\varphi^{-1}}$.
ix) $T_\varphi : L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισομετρία για κάθε $1 \le p \le \infty$ (ειδικότερα για $p = 2$, ο T_φ είναι unitary αν η φ είναι αντιστρέψιμη).

Απόδειξη. *i)* Για $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, f, $g : X \to \mathbb{K}$, $x \in X$ έχουμε $T_\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(\varphi(x)) = \lambda f(\varphi(x)) + \mu g(\varphi(x)) = \lambda T_\varphi f(x) + \mu T_\varphi g(x)$, άρα ο T_φ είναι γραμμικός τελεστής.

ii) Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{K}$ και $x \in X$. Έχουμε ότι $|T_\varphi f(x)| = |f(\varphi(x))| = |f|(\varphi(x)) = T_\varphi |f|(x)$.

iii) Για $f : X \to \mathbb{K}$, $x \in X$ είναι $\overline{T_\varphi f(x)} = \overline{f(\varphi(x))} = \overline{f}(\varphi(x)) = T_\varphi \overline{f}(x)$.

iv) Έστω $f : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $(T_\varphi f)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{A}$ αφού f, φ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες.

v) Για $f = X_A$, όπου $A \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $\int f d\mu = \int X_A d\mu = \mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)) = \int X_{\varphi^{-1}(A)} d\mu = \int X_A \circ \varphi d\mu = \int T_\varphi X_A d\mu = \int T_\varphi f d\mu$. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος και του T_φ έχουμε το αποτέλεσμα για απλές συναρτήσεις. Αν f μ-ολοκληρώσιμη τότε και $|f|$ μ-ολοκληρώσιμη. Ακόμα, υπάρχει ακολουθία $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ απλών μετρησίμων συναρτήσεων ώστε $f = \lim_n s_n$ και $\{|s_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα. Τότε $|s_n| \le |f|$ άρα από Θεώρημα 2.3.48. έχουμε ότι

$$\int f d\mu = \lim_n \int s_n d\mu = \lim_n \int T_\varphi s_n d\mu = \int T_\varphi f d\mu,$$

αφού το ζητούμενο ισχύει για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις και $\lim_n T_\varphi s_n = T_\varphi f$, $|T_\varphi s_n| = |s_n| \le |f|$.

vi) Αν $f : X \to \mathbb{K}$ με $f \ge 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $T_\varphi f(x) = f(\varphi(x)) \ge 0$ $\mu - \sigma.\pi.$

vii) $T_\varphi(1) = 1 \circ \varphi = 1$.

viii) Έστω φ αντιστρέψιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τον $T_{\varphi^{-1}}$ και για κάθε $f : X \to \mathbb{K}$, $x \in X$, έχουμε $T_\varphi(T_{\varphi^{-1}} f(x)) = T_\varphi f(\varphi^{-1}(x)) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = f(x)$ και $T_{\varphi^{-1}}(T_\varphi f(x)) = T_{\varphi^{-1}} f(\varphi(x)) = f(\varphi^{-1}(\varphi(x))) = f(x)$. Άρα ο T_φ είναι αντιστρέψιμος και $(T_\varphi)^{-1} = T_{\varphi^{-1}}$.

ix) Για $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, από τα προηγούμενα θα έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu = \int T_\varphi |f|^p d\mu = \int |T_\varphi f|^p d\mu = \|T_\varphi f\|_p^p.$$

Άρα $T_\varphi : L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι καλά ορισμένος και ισομετρία. Ειδικότερα για $p = 2$, έχουμε ότι ο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Hilbert και αν η φ είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση τότε ο T_φ είναι επίσης αντιστρέψιμος, άρα ο T_φ είναι unitary. □

Πρόταση 4.1.5. *Έστω Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα. Θεωρούμε τον τελεστή T_φ στον χώρο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του T_φ και όλες οι ιδιοτιμές του έχουν απόλυτη τιμή 1.*

Απόδειξη. Έχουμε $T_\varphi(1) = 1$, άρα το 1 είναι μια ιδιοτιμή του T_φ. Αν $T_\varphi f = \lambda f$ τότε $T_\varphi|f| = |T_\varphi f| = |\lambda f| = |\lambda||f|$ και επειδή $0 < \int |f|d\mu = \int T_\varphi|f|d\mu = = |\lambda| \int |f|d\mu$ έχουμε $|\lambda| = 1$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Ορισμός 4.1.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένας γραμμικός τελεστής $T : \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) καλείται* **διπλά στοχαστικός** *αν:*
i) $T(L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)) \subseteq L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, *και*
ii) *για κάθε* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ικανοποιεί τα ακόλουθα:*
1) *Αν* $f \geq 0\ \ \mu - \sigma.\pi.$ *τότε* $Tf \geq 0\ \ \mu - \sigma.\pi.$
2) $\int Tf d\mu = \int f d\mu$.
3) $T(1) = 1\ \ \mu - \sigma.\pi.$

Παρατήρηση 4.1.7. *Αν Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι ένα δυναμικό σύστημα, τότε ο τελεστής T_φ είναι διπλά στοχαστικός (ιδιότητες v), vi) και vii) του T_φ).*

Ορισμός 4.1.8. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p \leq \infty$. Για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), υπάρχει ένας καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής $T^* : L^q_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{K}$, όπου $1 < q < \infty$ με $1/p + 1/q = 1$ αν $1 < p < \infty$, $q = \infty$ για $p = 1$ και $q = 1$ για $p = \infty$, ο οποίος καλείται* **συζυγής** *του T και ικανοποιεί την σχέση*
$< Tf, g >=< f, T^*g >$ *για κάθε* $f \in L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$

(όπου για $f \in L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $< f, g >= \displaystyle\int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$*).*

Παρατήρηση 4.1.9. *Στην περίπτωση $p = 2$, επειδή ο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Hilbert, ο προηγούμενος ορισμός συμπίπτει με τον Ορισμό 2.5.5.*

Πρόταση 4.1.10. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και T ένας διπλά στοχαστικός τελεστής στον X. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
i) $T(L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)) \subseteq L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *για κάθε* $1 \leq p \leq \infty$,
ii) $\| T \|_1 = \| T \|_\infty = 1$, *και* $\| T \|_p \leq 1$ *για* $1 < p < \infty$, *και*
iii) *ο* T^* *είναι διπλά στοχαστικός.*

Απόδειξη. *i)*, *ii)* Για $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε $f = f^+ - f^-$ και $|f| = f^+ + f^-$ (όπου $f^+ = \max\{0, f\} \geq 0$, $f^- = \max\{0, -f\} \geq 0$).

Από τις ιδιότητες του T έχουμε ότι $Tf^+ \geq 0$, $Tf^- \geq 0$ (οι εκφράσεις αυτές έχουν νόημα αφού $L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$). Τότε,

$$|Tf| = |T(f^+ - f^-)| = |Tf^+ - Tf^-| \leq Tf^+ + Tf^- = T(f^+ + f^-) = T|f|.$$

Ακόμα, $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\mu - \sigma.\pi.$ άρα $T|f| \leq T\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$ $\mu - \sigma.\pi.$ δηλαδή $T(L^\infty_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)) \subseteq L^\infty_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ και $\|T\|_\infty \leq 1$. Ανάλογα, $\|T\|_1 \leq 1$. Όμως $T1 = 1$ και άρα $\|T\|_1 = \|T\|_\infty = 1$.

Από τα προηγούμενα, χρισημοποιώντας το Πόρισμα 2.5.26. έχουμε $T(L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)) \subseteq L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ και ότι $\|T\|_p \leq 1$ για $1 < p < \infty$.

iii) Από το *ii*) έχουμε ότι ο T ορισμένος στον $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ για $1 \leq p \leq \infty$ είναι φραγμένος, άρα ορίζεται καλά ο συζυγής τελεστής του T, T^*, στον χώρο $L^q_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ με $1/p+1/q = 1$ ($q = \infty$ για $p = 1$ και $q = 1$ για $p = \infty$). Αν $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ τότε $\int T^* f d\mu =< T^*f, 1 >=< f, T1 >=< f, 1 >= \int f d\mu$, και επειδή ο $L^\infty_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι πυκνός στον $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ έχουμε ότι ο T^* έχει μοναδική συνεχή επέκταση (την οποία καλούμε πάλι T^*) στον $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ που ικανοποιεί την σχέση: $\int T^* f d\mu = \int f d\mu$ για κάθε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Τώρα, αν υπήρχε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ ώστε $f \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ ώστε $T^*f < 0$ σε σύνολο A με $\mu(A) > 0$ θα είχαμε: (επειδή $f, X_A \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ ισχύει $fTX_A \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$)

$$0 \leq \int fTX_A d\mu =< f, TX_A >=< T^*f, X_A >= \int_A T^* f d\mu < 0, \text{ άτοπο},$$

δηλαδή αν $f \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $T^*f \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ και άρα (απόδειξη όμοια όπως αυτή για τον T) $|T^*f| \leq T^*|f|$. Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή έχουμε

$$\int |T^*f| d\mu \leq \int T^*|f| d\mu = \int |f| d\mu \text{ για κάθε } f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu),$$

δηλαδή $T^*(L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)) \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Τέλος, για κάθε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ έχουμε $< f, 1 >=< Tf, 1 >=< f, T^*1 >$ από ιδιότητες του T, άρα $T^*1 = 1$. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι T^* διπλά στοχαστικός. □

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι οι ιδιότητες ενός διπλά στοχαστικού τελεστή T_φ που επάγεται από το δυναμικό σύστημα Φ=$(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ είναι χαρακτηριστικές. Πιο συγκεκριμένα ισχύει η ακόλουθη πρόταση την απόδειξη της αποίας παραλείπουμε.

Πρόταση 4.1.11. *Θεωρούμε τον χώρο μέτρου* $(X = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu = \lambda|_{\mathcal{B}([0,1])})$. *Τότε, οι τελεστές της μορφής* T_φ *για κάποιο δυναμικό σύστημα* Φ=$(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ *είναι ακριβώς οι διπλά στοχαστικοί τελεστές οι οποίοι είναι ισομετρίες στον* $L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$. *Ακόμα, το* Φ *είναι αντιστρέψιμο δυναμικό σύστημα αν και μόνο αν ο* T_φ *είναι unitary.*

4.2 Εργοδικά Θεωρήματα για Δυναμικά Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται και αποδεικνύονται θεμελιώδη εργοδικά θεωρήματα τα οποία ισχύουν για οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα, όπως τα θεωρήματα του Birkoff (Θεώρημα 4.2.4.), του Yosida (Θεώρημα 4.2.8.) και το Θεώρημα Poincaré (Θεώρημα 4.2.13.).

Θεώρημα 4.2.1 (Hopf's Maximal Ergodic Theorem). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και τελεστής $T : L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ με τις εξής ιδιότητες:*
i) Αν $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $Tf \geq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$, και
ii) $\|T\|_1 \leq 1$.
Τότε, για κάθε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε:

$$\int_{B^*(f)} f(x)d\mu(x) \geq 0, \quad \text{όπου } B^*(f) = \{x \in X \mid \sup_n \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x) > 0\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $f_n(x) = \max\limits_{1 \leq l \leq n} \sum\limits_{k=0}^{l-1} T^k f(x)$.

Τότε $f = f_1$, f_n μετρήσιμες και $f_n \leq f_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν θέσουμε $B^*_n(f) = \{x \in X \mid f_n(x) > 0\}$ τότε $B^*_n(f) \subseteq B^*_{n+1}(f)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $B^*(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^*_n(f)$. $f_n^+ \geq 0$. Από υπόθεση $Tf_n^+ \geq 0$, και άρα $f \leq f + Tf_n^+$,

και $\sum\limits_{k=0}^{l} T^k f = f + T(\sum\limits_{k=0}^{l-1} T^k f) \leq f + Tf_n^+$ για κάθε $l = 1, ..., n$, καθώς

$\sum\limits_{k=0}^{l-1} T^k f \leq f_n \leq f_n^+$ για κάθε $l \leq n$, δηλαδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f + Tf_n^+$.

Άρα: $$\int_{B^*_n(f)} f d\mu \geq \int_{B^*_n(f)} (f_n - Tf_n^+) d\mu = \int_{B^*_n(f)} f_n d\mu - \int_{B^*_n(f)} Tf_n^+ d\mu =$$

$$= \int_X f_n^+ d\mu - \int_X Tf_n^+ d\mu = \|f_n^+\|_1 - \|Tf_n^+\|_1 \geq 0, \quad \text{καθώς } \|T\|_1 \leq 1.$$

Για $n \to \infty$ έχουμε $\int_{B^*(f)} f(x)d\mu(x) \geq 0$ που είναι το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 4.2.2. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου πιθανότητας και τελεστής* $T : L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *τέτοιος ώστε* $\|T\|_1 \leq 1$ *και* $Tf \geq 0 \ \ \mu - \sigma.\pi.$ *για κάθε* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *με* $f \geq 0 \ \ \mu - \sigma.\pi.$ *Για κάθε* $\alpha,\ \beta$ *πραγματικούς αριθμούς και* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *αν θεωρήσουμε τα σύνολα*

$$A^*(f, \alpha) = \{x \in X \mid \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x) > \alpha\},$$

$$A_*(f, \beta) = \{x \in X \mid \inf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x) < \beta\}, \quad \textit{έχουμε}$$

$$\alpha\mu(A^*(f, \alpha)) \leq \int_{A^*(f,\alpha)} f(x) d\mu(x), \quad \textit{και} \quad \beta\mu(A_*(f, \beta)) \geq \int_{A_*(f,\beta)} f(x) d\mu(x).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.2.1. έχουμε ότι $\displaystyle\int_{B^*(f)} f(x) d\mu(x) \geq 0$ για κάθε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο για την $h = f - \alpha \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ παρατηρώντας ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} T^k h(x) > 0 \ \text{ αν και μόνο αν } \ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x) > \alpha. \ \text{Έχουμε}$$

$$B^*(h) = A^*(f, \alpha), \ \ \text{άρα} \ 0 \leq \int_{B^*(h)} h(x) d\mu(x) = \int_{A^*(f,\alpha)} (f(x) - \alpha) d\mu(x),$$

$$\text{ή ισοδύναμα,} \ \ \alpha\mu(A^*(f, \alpha)) \leq \int_{A^*(f,\ \alpha)} f(x) d\mu(x).$$

Ακόμα, επειδή $A_*(f, \beta) = A^*(-f, -\beta)$, ομοίως με πριν, θα έχουμε

$$\int_{A_*(f,\beta)} f(x) d\mu(x) = \int_{A^*(-f,-\beta)} f(x) d\mu(x) = -\int_{A^*(-f,-\beta)} -f(x) d\mu(x) \leq$$

$$\leq -(-\beta)\mu(A^*(-f, -\beta)) = \beta\mu(A_*(f, \beta)), \ \ \text{δηλαδή το ζητούμενο.}$$

□

Πόρισμα 4.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και τελεστής $T : L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ τέτοιος ώστε $\|T\|_1 \leq 1$ και $Tf \geq 0 \ \ \mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $f \geq 0 \ \ \mu - \sigma.\pi.$*

Για τυχαία $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, θέτοντας $f^* = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$, έχουμε

$$\int_{[f^*>0]} f(x) d\mu(x) \geq 0 \ \ \textit{και} \ \ \int_{[f^* \geq 0]} f(x) d\mu(x) \geq 0.$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε

$$\int_{[f^*>0]} f(x) d\mu(x) = \int_{A^*(f,\,0)} f(x) d\mu(x) \geq 0 \mu(A^*(f, 0)) = 0.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$0 \leq \int_{[(f+\varepsilon)^*>0]} (f + \varepsilon) d\mu = \int_{[f^*>-\varepsilon]} f d\mu + \varepsilon \mu([f^* > -\varepsilon]) \leq \int_{[f^*>-\varepsilon]} f d\mu + \varepsilon.$$

Για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\displaystyle\int_{[f^*>-\frac{1}{n}]} f d\mu \geq -\frac{1}{n}$ $\qquad (*)$

και επειδή $[f^* \geq 0] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f^* > -\frac{1}{n}]$, για $n \to \infty$ στην σχέση $(*)$ έχουμε

$$\int_{[f^* \geq 0]} f(x) d\mu(x) \geq 0.$$

□

Θεώρημα 4.2.4 (Birkhoff's Individual Ergodic Theorem)**.**
Έστω Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ένα δυναμικό σύστημα και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Τότε υπάρχει $\widetilde{f} \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k_{\varphi} f(x) = \widetilde{f}(x) \ \ \mu - \sigma.\pi.$

Απόδειξη. Ορίζουμε $f^*(x) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f(x), \;\; f_*(x) = \inf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f(x)$

$$\text{και } \overline{f}(x) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f(x), \;\; \underline{f}(x) = \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f(x).$$

Τότε $A^*(f, \alpha) = \{x \in X \mid f^*(x) > \alpha\}$, και $A_*(f, \beta) = \{x \in X \mid f_*(x) < \beta\}$. Για σταθερά $\beta < \alpha$ θεωρούμε $A(\alpha, \beta) := \{x \in X \mid \underline{f}(x) < \beta < \alpha < \overline{f}(x)\}$.

$$\text{Παρατηρώντας ότι } \overline{f}(\varphi(x)) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi^k(x)) =$$

$$= \limsup_n [(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\varphi^k(x))) \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} f(x)] = \limsup_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\varphi^k(x)).$$

Άρα $\overline{f}(\varphi(x)) = \overline{f}(x)$. Εντελώς ανάλογα έχουμε $\underline{f}(\varphi(x)) = \underline{f}(x)$, άρα ισχύει $\varphi(A(\alpha, \beta)) \subseteq A(\alpha, \beta)$. Αν υποθέσουμε ότι $\mu(A(\alpha, \beta)) = \gamma > 0$ και περιοριστούμε στο δυναμικό σύστημα

$$\Phi_{\alpha,\beta} := (A(\alpha, \beta), \mathcal{A}|_{A(\alpha,\beta)}, \frac{1}{\gamma}\mu, \varphi|_{A(\alpha,\beta)}),$$

επειδή $f_* \leq \underline{f} \leq \overline{f} \leq f^*$ έχουμε ότι $A^*(f, \alpha) = A_*(f, \beta) = A(\alpha, \beta)$. Πράγματι, $A^*(f, \alpha) = \{x \in A(\alpha, \beta) \mid f^*(x) > \alpha\} \subseteq A(\alpha, \beta)$ και αν $x \in A(\alpha, \beta)$ τότε $f^*(x) \geq \overline{f}(x) > \alpha$, δηλαδή $x \in A^*(f, \alpha)$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $A_*(f, \beta) = = A(\alpha, \beta)$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 4.2.2. έχουμε:

$$\alpha\mu(A(\alpha, \beta)) = \alpha\mu(A^*(f, \alpha)) \leq \int_{A^*(f,\alpha)} f(x) d\mu(x) = \int_{A(\alpha,\beta)} f(x) d\mu(x) =$$

$$= \int_{A_*(f,\beta)} f(x) d\mu(x) \leq \beta\mu(A_*(f, \beta)) = \beta\mu(A(\alpha, \beta))$$

και επειδή $\mu(A(\alpha, \beta)) > 0$ έχουμε $\alpha \leq \beta < \alpha$ άτοπο, άρα $\mu(A(\alpha, \beta)) = 0$.

Αν τώρα, $A = \{x \in X \mid \underline{f}(x) < \overline{f}(x)\}$ τότε

$$A = \bigcup_{\{\beta<\alpha \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}\}} A(\alpha, \beta), \;\; \text{και άρα } \mu(A) = 0, \;\; \text{δηλαδή } \overline{f} = \underline{f} \quad \mu - \sigma.\pi.$$

Τότε $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f(x) = \overline{f}(x)$ $\mu - \sigma.\pi.$ Από Λήμμα Fatou και ιδιότητες του

T_φ έχουμε $\displaystyle\int |\overline{f}\;| \,d\mu = \int \lim_n |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f| d\mu \leq \liminf_n \int |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f| d\mu \leq$

$$\leq \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int |T_\varphi^k f| d\mu = \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int T_\varphi^k |f| d\mu = \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int |f| d\mu =$$

$$= \int |f| d\mu < \infty, \;\; \text{δηλαδή } \; \overline{f} \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Θέτουμε $\widetilde{f} = \overline{f}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 4.2.5. *Το προηγούμενο ισχύει και για $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, γράφοντας $f = u + iv$, διότι το αποτέλεσμα θα ισχύει για τις u και v που ανήκουν στον $L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Πρόταση 4.2.6. *Έστω Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Τότε, αν $A \in \mathcal{A}$ με $\varphi^{-1}(A) = A$, ισχύει, $\displaystyle\int_A f d\mu = \int_A \widetilde{f} d\mu,$

όπου $\widetilde{f}$ η οριακή συνάρτηση του προηγούμενου θεωρήματος.

Απόδειξη. Θεωρούμε $A_{n,k} := \{x \in A \mid \frac{k}{2^n} \leq \widetilde{f}(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $\varphi(A_{n,k}) \subseteq A_{n,k}$, αφού $T_\varphi \widetilde{f} = \widetilde{f}$. Επίσης $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{n,k}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ περιορίζουμε το Φ στο $A_{n,k}$. Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή

$$f^*(x) = \sup_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_\varphi^k f(x), \;\; \text{θα είναι } \; f^* > \frac{k}{2^n} - \varepsilon \;\; \text{στο } \; A_{n,k}.$$

Τότε $A_{n,k} = A^*(f, \dfrac{k}{2^n} - \varepsilon)$ και από Πόρισμα 4.2.2. έχουμε

$$\int_{A_{n,k}} f d\mu \geq (\frac{k}{2^n} - \varepsilon)\mu(A_{n,k}).$$

Επίσης $f_* \leq \widetilde{f} < \dfrac{k+1}{2^n}$ στο $A_{n,k}$ και άρα

$$(-f)^* = -f_* > -\frac{k+1}{2^n} \text{ στο } A_{n,k}, \text{ δηλαδή } A_{n,k} = A^*(-f, -\frac{k+1}{2^n}).$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.2.2. έχουμε $\displaystyle\int_{A_{n,k}} -f d\mu \geq -\frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k})$.

$$\text{Επομένως, } (\frac{k}{2^n} - \varepsilon)\mu(A_{n,k}) \leq \int_{A_{n,k}} f d\mu \leq \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}) \text{ για κάθε } \varepsilon > 0.$$

$$\text{Άρα για } \varepsilon \to 0 \text{ έχουμε } \frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}) \leq \int_{A_{n,k}} f d\mu \leq \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}).$$

Από τον ορισμό του $A_{n,k}$ έχουμε $\displaystyle\frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}) \leq \int_{A_{n,k}} \widetilde{f} d\mu \leq \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k})$.

Συνεπώς, $\displaystyle\left| \int_{A_{n,k}} f d\mu - \int_{A_{n,k}} \widetilde{f} d\mu \right| \leq \frac{1}{2^n}\mu(A_{n,k})$. Αθροίζοντας ως προς k,

$$\left| \int_A f d\mu - \int_A \widetilde{f} d\mu \right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^n}\mu(A_{n,k}) = \frac{1}{2^n}\mu(A) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty,$$

$$\text{δηλαδή } \int_A f d\mu = \int_A \widetilde{f} d\mu.$$

□

Παρατήρηση 4.2.7. *Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, καθώς το αποτέλεσμα θα ισχύει για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f που ανήκουν στον $L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Θεώρημα 4.2.8 (Yosida's Mean Ergodic Theorem)**.** *Έστω T ένας διπλά στοχαστικός τελεστής (Ορισμός 4.1.6.) σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, όπου $1 \leq p < \infty$.*

$$\textit{Τότε υπάρχει } f^* \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \textit{ ώστε } \lim_n \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f - f^* \right\|_p = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $Th \leq h \;\; \mu - \sigma.\pi.$ (τέτοιες υπάρχουν, για παράδειγμα η $\mu - \sigma.\pi.$ σταθερή συνάρτηση ίση με 1). Τότε αν $g = h - Th$, έχουμε $g \geq 0 \;\; \mu - \sigma.\pi.$ και $\int g d\mu = 0$. Άρα $g = 0 \;\; \mu - \sigma.\pi.$, δηλαδή $Th = h \;\; \mu - \sigma.\pi.$ Επειδή ο συζυγής τελεστής T^* του T είναι επίσης διπλά στοχαστικός (Πρόταση 4.1.10.), ανάλογα ισχύει ότι $T^*h = h \;\; \mu - \sigma.\pi.$

Στα επόμενα, οι ισότητες μεταξύ συναρτήσεων είναι $\mu - \sigma.\pi.$
Παρατηρούμε ότι αν $h_1,\, h_2 : X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις ώστε $T^*h_1 = h_1$ και $T^*h_2 = h_2$, τότε, από θετικότητα του T^*, έχουμε $T^*(h_1 \wedge h_2) \leq h_1 \wedge h_2$. Άρα, όπως πριν, θα ισχύει $T^*(h_1 \wedge h_2) = h_1 \wedge h_2$ (όπου για $x \in X$, $(h_1 \wedge h_2)(x) := = \min(h_1(x), h_2(x)))$. Αν $f = g - Tg$ για $g \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, τότε αφού $\|T\|_p \leq 1$, ισχύει

$$\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f \;\|_p = \| \frac{1}{n}(g - T^n g)\|_p \leq \frac{1}{n}(\|g\|_p + \|T^n g\|_p) \leq \frac{2}{n}\|g\|_p \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, θέτοντας $f^* = 0$, έχουμε την ισχύ του θεωρήματος για συναρτήσεις της μορφής $g - Tg$, όπου $g \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Επομένως το θεώρημα ισχύει και για όλες τις συναρτήσεις f που ανήκουν στον υπόχωρο $\mathcal{H}_1 = \{g - Tg \mid \; g \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$ του $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ακόμα, το θεώρημα ισχύει και για όλα τα στοιχεία f του υποχώρου $\mathcal{H}_2 = \{g \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid \; Tg = g\}$, θέτοντας $f^* = f$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ είναι πυκνό στον $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και τότε θα έχουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος. Πράγματι, αν $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, και $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία του $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ τέτοια ώστε $\lim_n \|f_n - f\|_p = 0$, και το θεώρημα ισχύει για κάθε συνάρτηση f_n, $n \in \mathbb{N}$, τότε για τυχόν $\varepsilon > 0$, θα υπάρχουν

$$n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \;\text{ και }\; n_1 \equiv n_1(\varepsilon) > n_0 \;\text{ ώστε }\; \|f - f_{n_0}\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \;\text{ και}$$

$$\|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f_{n_0} - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} T^j f_{n_0}\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ για }\; n \geq m > n_1. \text{ Τότε,}$$

$$\|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f - \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} T^l f\|_p = \|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j (f - f_{n_0}) - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} T^j (f - f_{n_0}) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f_{n_0} - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} T^j f_{n_0}\|_p \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|T^j (f - f_{n_0})\|_p +$$

$$+ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \|T^j (f - f_{n_0})\|_p + \|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f_{n_0} - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} T^j f_{n_0}\|_p \leq 2\|f - f_{n_0}\|_p +$$

$$+\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j f_{n_0}-\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}T^j f_{n_0}\|_p<\varepsilon \text{ για κάθε } n\geq m>n_1.$$

Επειδή ο $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι χώρος Banach, υπάρχει $f^*\in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ ώστε

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^k f-f^*\|_p=0.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ είναι πυκνό στον $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Θα δείξουμε ότι το μόνο στοιχείο $f\in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)=(L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu))^*$ (όπου $1/p+1/q=1$ για $p>1$ και $q=\infty$ για $p=1$) το οποίο είναι κάθετο στον $\mathcal{H}_1$ και στον $\mathcal{H}_2$, είναι η σταθερή συνάρτηση 0. Έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι κάθετη στον $\mathcal{H}_1$ και στον $\mathcal{H}_2$. Τότε, για κάθε $g\in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ έχουμε

$$0=<f,g-Tg>=<f,g>-<f,Tg>=<f,g>-<T^*f,g>=$$

$=<f-T^*f,g>$, και άρα $f=T^*f$. Για $c\in\mathbb{R}$, θεωρούμε το σύνολο
$A=\{x\in X \mid f(x)>c\}\in\mathcal{A}$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε
$g_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}[(c+\varepsilon)\wedge f-(c\wedge f)]$.

Ισχυρισμός 1. $0\leq g_\varepsilon\leq 1$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν $x\in X$ ώστε $f(x)\leq c$, τότε
$g_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}[c-c]=0 \quad (1).$
Αν $x\in X$ ώστε $f(x)>c+\varepsilon$, τότε
$g_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}(c+\varepsilon-c)=1 \quad (2).$
Αν $x\in X$ ώστε $c<f(x)\leq c+\varepsilon$, τότε
$g_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}(f(x)-c)$ με $0<f(x)-c\leq\varepsilon$ δηλαδή $0<g_\varepsilon(x)\leq 1$,
που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι η g_ε συγκλίνει με αύξοντα τρόπο στην X_A καθώς το ε φθίνει στο 0, άρα η T^*g_ε συγκλίνει με αύξοντα τρόπο στο T^*X_A καθώς το ε φθίνει στο 0. Εφόσον, $T^*f=f$ και T^* γραμμικός, θετικός τελεστής, θα ισχύει

$$T^*g_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}[T^*(c+\varepsilon)\wedge f-T^*(c\wedge f)]=\frac{1}{\varepsilon}[(c+\varepsilon)\wedge f-(c\wedge f)]=g_\varepsilon.$$

$$\text{Τότε, }\ T^*X_A=\lim_{\varepsilon\to 0}T^*g_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}g_\varepsilon=X_A.$$

Ισχυρισμός 2. $TX_A=X_A$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω $B \in \mathcal{A}$. Από θετικότητα του T^* έχουμε ότι $T^*X_{A\cap B} \leq T^*X_A = X_A$ και $T^*X_{A\cap B} \leq T^*X_B$ $(X_{A\cap B} \leq \min\{X_B, X_A\})$. Τότε, $T^*X_{A\cap B} = X_A T^* X_{A\cap B} \leq X_A T^* X_B$ (3), και παρατηρώντας ότι $T^*X_{A^c} = T^*(1 - X_A) = 1 - T^*X_A = 1 - X_A = X_{A^c}$, ανάλογα θα έχουμε $T^*X_{A^c\cap B} \leq X_{A^c}T^*X_B$ και άρα $T^*[(1 - X_A)X_B] \leq (1 - X_A)T^*X_B$. Τότε, $T^*X_B - T^*X_{A\cap B} \leq T^*X_B - X_AT^*X_B$, δηλαδή $X_AT^*X_B \leq T^*X_{A\cap B}$ (4). Από (3) και (4) έχουμε ότι $X_AT^*X_B = T^*X_{A\cap B}$ και άρα

$$< TX_A, X_B >=< X_A, T^*X_B >=< 1, X_AT^*X_B >=< 1, T^*X_{A\cap B} >=$$

$$=< T1, X_{A\cap B} >=< 1, X_AX_B >=< X_A, X_B > .$$

Από γραμμικότητα θα έχουμε ότι $< TX_A, h >=< X_A, h >$ για κάθε h απλή μετρήσιμη και τελικά για κάθε $h \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, αφού οι απλές μετρήσιμες είναι πυκνές στον $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Οπότε ισχύει ότι $TX_A = X_A$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι $X_A \in \mathcal{H}_2$. Εφ᾽ όσον η f είναι κάθετη στον $\mathcal{H}_2$ ισχύει

$$\int_{[f>c]} f d\mu =< f, X_A >= 0 \text{ για κάθε } c \in \mathbb{R}.$$

Εργαζόμενοι εντελώς ανάλογα για την $-f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, η οποία είναι κάθετη στους $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, θα έχουμε

$$\int_{[-f>c]} -f d\mu = 0 \text{ για κάθε } c \in \mathbb{R}. \text{ Άρα για } c = 0 \text{ έχουμε}$$

$$\int_{[f>0]} f d\mu = 0, \int_{[f<0]} f d\mu = -\int_{[-f>0]} -f d\mu = 0, \text{ δηλαδή } f = 0 \ \ \mu - \sigma.\pi.$$

Επομένος ισχύει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 4.2.9. *Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για* $f \in L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *όπου* $1 \leq p < \infty$, *καθώς ισχύει για το πραγματικό και φανταστικό μέρος της* f.

Πόρισμα 4.2.10. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *δυναμικό σύστημα και* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Τότε* $\widetilde{f} = f^*$ $\mu - \sigma.\pi.$ *και* $\int f d\mu = \int \widetilde{f} d\mu = \int f^* d\mu$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, αν $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\text{υπάρχει } f^* \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ ώστε } \lim_n \| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f - f^* \|_1 = 0,$$

και επειδή η L^1-σύγκλιση συνεπάγεται την κατά μέτρο, έχουμε ότι υπάρχει

$$\{\frac{1}{l_n} \sum_{k=0}^{l_n - 1} T^k f\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ υπακολουθία της } \{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ώστε να ισχύει}$$

$$\lim_n \frac{1}{l_n} \sum_{k=0}^{l_n - 1} T^k f = f^* \ \ \mu - \sigma.\pi. \text{ Όμως από Θεώρημα 4.2.4. έχουμε}$$

$$\lim_n \frac{1}{l_n} \sum_{k=0}^{l_n - 1} T^k f = \widetilde{f} \ \ \mu - \sigma.\pi., \text{ άρα } \widetilde{f} = f^* \ \ \mu - \sigma.\pi. \text{ και τότε}$$

$$\text{από Πρόταση 4.2.6. : } \quad \int f d\mu = \int \widetilde{f} d\mu = \int f^* d\mu.$$

□

Παρατηρήσεις 4.2.11. *1) Το συμπέρασμα του προηγούμενου πορίσματος ισχύει και για τον χώρο $L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ όπως παρατηρήθηκε και στα προηγούμενα. 2) Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνάρτηση $\widetilde{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, με $\widetilde{f} = f^*$ $\mu - \sigma.\pi.$, προσδιορίζεται σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις (για παράδειγμα αν $Tf = f$ τότε $\widetilde{f} = f$ ή αν $f = g - Tg$ για $g \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, τότε $\widetilde{f} = 0$). Στην επόμενη παράγραφο θα αναφέρουμε μια γενική περίπτωση στην οποία προσδιορίζεται η $\widetilde{f}$, ακριβέστερα, όταν Φ είναι εργοδικό δυναμικό σύστημα.*

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ένα εργοδικό θεώρημα για χώρους Hilbert.

Θεώρημα 4.2.12 (von Neumann's Unitary Mean Ergodic Theorem)**.**
Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστω U ένας unitary τελεστής στον $\mathcal{H}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
i) Αν θέσουμε $\mathcal{M}_1 = \{x \in \mathcal{H} \mid \ Ux = x\}$ και $\mathcal{M}_2 = \overline{\{x - Ux \mid \ x \in \mathcal{H}\}}$, έχουμε ότι $\mathcal{H} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.
ii) Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$\lim_n \| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k x - P_{\mathcal{M}_1} x \| = 0 \ \ (\textit{όπου } P_{\mathcal{M}_1} \textit{ η ορθή προβολή στο } \mathcal{M}_1).$$

Απόδειξη. *i*) Από Θεώρημα 2.4.14. αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1^{\perp}$. Αν $x,\ y \in \mathcal{H}$ με $Ux = x$ τότε $< y - Uy, x >=< y, x > - < Uy, Ux >= 0$. Καθώς ο χώρος $\mathcal{M}_1^{\perp}$ είναι κλειστός, έχουμε ότι $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp}$. Αντίστροφα, αν $z \in \mathcal{M}_1^{\perp}$, θεωρούμε το στοιχείο $w = z - P_{\mathcal{M}_2} z \in \mathcal{M}_2^{\perp}$. Τότε για κάθε $y \in \mathcal{H}$ έχουμε $< w, y - Uy >= 0$, δηλαδή $< w, y >=< w, Uy >=< U^{-1}w, y >$ για κάθε $y \in Y$, άρα $w = U^{-1}w$. Τότε $w \in \mathcal{M}_1$ και επειδή $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp}$, έχουμε ακόμα ότι $w = z - P_{\mathcal{M}_2} z \in \mathcal{M}_1^{\perp}$ και άρα $w = 0$, δηλαδή $z = P_{\mathcal{M}_2} z \in \mathcal{M}_2$.

ii) Έστω $x \in \mathcal{H}$. Χρησιμοποιούμε την διάσπαση $\mathcal{H} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ του *i*) ερωτήματος. Τότε $x = x_1 + x_2$ με $x_1 = P_{\mathcal{M}_1} x \in \mathcal{M}_1$ και $x_2 \in \mathcal{M}_2$. Έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k x_1 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_1 = x_1 = P_{\mathcal{M}_1} x \qquad (*).$$

Είναι απλό κανείς να ελέγξει ότι το σύνολο

$$\{w \in \mathcal{H} \mid \ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k w = 0\}$$

είναι κλειστό και περιέχει το σύνολο $\{y - Uy \mid \ y \in \mathcal{H}\}$, άρα περιέχει και το $\mathcal{M}_2$. Τότε έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k x_2 = 0 \qquad (**).$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ παίρνουμε το ζητούμενο από γραμμικότητα του U. □

Θεώρημα 4.2.13 (Poincaré's Recurrence Theorem). *Έστω* $\Phi{=}(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *ένα δυναμικό σύστημα και* $A \in \mathcal{A}$. *Τότε, σχεδόν για κάθε* $x \in A$ *υπάρχει* $n \equiv n(A, x) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\varphi^n(x) \in A$.

Απόδειξη. Έστω $B = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid \ \varphi^n(x) \in A\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus \varphi^{-n}(A))$. Καθώς

$$\varphi^{-m}(B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\varphi^{-m}(A) \setminus \varphi^{-(n+m)}(A)) \ \text{ για κάθε } \ m \in \mathbb{N}$$

έχουμε ότι για $i \neq j \in \mathbb{N}$ τα σύνολα $\varphi^{-i}(B)$, $\varphi^{-j}(B)$ είναι ξένα. Πράγματι, έστω $j > i$ με $j = i + k$. Αν $x \in B$ τότε $\varphi^k(x) \notin B$, αλλιώς $\varphi^k(x) \in A$, άτοπο από ορισμό του B. Άρα $B \cap \varphi^{-k}(B) = \emptyset$ και τότε

$$\varphi^{-i}(B) \cap \varphi^{-(i+k)}(B) = \emptyset, \ \text{ δηλαδή } \ \varphi^{-i}(B) \cap \varphi^{-j}(B) = \emptyset.$$

Επειδή όμως το μ είναι πεπερασμένο μέτρο ($\mu(X) = 1$) και $\mu(\varphi^{-n}(B)) = \mu(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\mu(B) = 0$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

4.3 Εργοδικά Δυναμικά Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τα εργοδικά δυναμικά συστήματα και θα αποδείξουμε τις βασικές χαρακτηριστικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών.

Ορισμός 4.3.1. *Ένα δυναμικό σύστημα Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι* **εργοδικό** *αν για $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\varphi^{-1}(A) = A$ συνεπάγεται είτε $\mu(A) = 0$ είτε $\mu(A) = 1$.*

Ένας διπλά στοχαστικός τελεστής T λέγεται **εργοδικός** *όταν για $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $Tf = f$ συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$*

Πρόταση 4.3.2. *Έστω δυναμικό σύστημα Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) Το Φ είναι ένα εργοδικό σύστημα.
ii) Ο τελεστής T_φ είναι εργοδικός.

$$iii)\ \ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k_\varphi f = \int f d\mu \quad \mu - \sigma.\pi. \qquad \text{για κάθε } f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

$$iv)\ \ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \varphi^{-k}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{για κάθε } \ A,\ B \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. $i) \Rightarrow ii)$ Έστω $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $T_\varphi f = f$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $X(k,n) = \{x \in X \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \in \mathcal{A}$. Το Φ είναι εργοδικό σύστημα και ισχύει $\varphi^{-1}(X(k,n)) = X(k,n)$ επειδή $f = T_\varphi f = f \circ \varphi$. Τότε, $\mu(X(k,n)) \in \{0,1\}$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακριβώς ένα $k \equiv k(n) \in \mathbb{Z}$ ώστε $\mu(X(k(n),n)) = 1$. Τότε το σύνολο $X_0 = \bigcap_{n=0}^\infty X(k(n),n)$ έχει μ-μέτρο ίσο με 1, αφού

$$0 \leq \mu(X_0^c) = \mu(\bigcup_{n=0}^\infty (X(k(n),n))^c) \leq \sum_{n=0}^\infty \mu(X(k(n),n))^c) = 0.$$

Επίσης $X(k(n_1),n_1) \subseteq X(k(n_2),n_2)$ για κάθε $n_2 \leq n_1$ και άρα από αρχή κιβωτισμού υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $X_0 = \{x \in X \mid f(x) = c\}$. Άρα $f(x) = c \quad \mu - \sigma.\pi.$, δηλαδή T_φ εργοδικός.

$ii) \Rightarrow iii)$ Έστω $\widetilde{f}$ η οριακή συνάρτηση του Θεωρήματος 4.2.4. Τότε $T_\varphi(\widetilde{f}) = \widetilde{f}$ και $\widetilde{f} \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ αφού $\int f d\mu = \int \widetilde{f} d\mu$ και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Άρα αφού ο T_φ είναι εργοδικός, έχουμε $\widetilde{f} = c \quad \mu - \sigma.\pi.$ όπου c μια σταθερά και άρα $\int f d\mu = \int \widetilde{f} d\mu = c$. Από Θεώρημα 4.2.4. έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k_\varphi f = \widetilde{f} = c = \int f d\mu \quad \mu - \sigma.\pi.$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

$iii) \Rightarrow iv)$ Έστω $A,\ B \in \mathcal{A}$. Τότε $f = X_B \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Εφ' όσον $T^k_\varphi f(x) = f(\varphi^k(x)) = X_B(\varphi^k(x)) = X_{\varphi^{-k}(B)}(x)$ για κάθε $x \in X$ αφού $\varphi^k(x) \in B$ αν και μόνο αν $x \in \varphi^{-k}(B)$ για $k \in \mathbb{N}$, από υπόθεση έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_B(\varphi^k(x)) = \int_X X_B d\mu \ \ \mu - \sigma.\pi., \quad \text{ή ισοδύναμα,}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{\varphi^{-k}(B)}(x) = \mu(B) \ \ \mu - \sigma.\pi.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (ολοκληρώνοντας ως προς A) έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_A X_{\varphi^{-k}(B)}(x) d\mu = \int_A \mu(B) d\mu, \qquad \text{δηλαδή}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \varphi^{-k}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

$iv) \Rightarrow i)$ Έστω ένα σύνολο $B \in \mathcal{A}$ ώστε $\varphi^{-1}(B) = B$. Τότε $\varphi^{-k}(B) = B$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $A = B^c$. Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$0 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(B^c \cap \varphi^{-k}(B)) = \mu(B^c)\mu(B).$$

και άρα $\mu(B) \in \{0, 1\}$, δηλαδή το Φ είναι εργοδικό δυναμικό σύστημα. □

Πρόταση 4.3.3. *Έστω δυναμικό σύστημα Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Θεωρούμε τον τελεστή T_φ, ορισμένο στον χώρο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Οι ισοδυναμίες $i) - iv)$ της Πρότασης 4.3.2. είναι επιπλέον ισοδύναμες με την*
$v)$ το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του T_φ.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες $i) - iv)$ της Πρότασης 4.3.2. στην περίπτωση που ο T_φ ορίζεται στον χώρο $L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, αφού ισχύουν τα προηγούμενα για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των αντίστοιχων συναρτήσεων.

$ii) \Rightarrow v)$ Αν $f \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ όπου $T_\varphi f = f$, τότε, από ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz, έχουμε $\|f\|_1 \leq \|f\|_2(\mu(X))^{1/2} < +\infty$ και άρα $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Εφόσον ο T_φ είναι εργοδικός τελεστής, θα υπάρχει $c \in \mathbb{C}$

ώστε $f(x) = c$ $\mu - \sigma.\pi.$ άρα το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του T_φ.

$v) \Rightarrow i)$ Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\varphi^{-1}(A) = A$. Έχουμε ότι ισχύει $T_\varphi X_A = X_{\varphi^{-1}(A)} = X_A$. Καθώς $X_A \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του T_φ από υπόθεση, η συνάρτηση X_A είναι σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$ Αν $X_A = 1$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $\mu(A) = 1$, ενώ αν $X_A = 0$ $\mu - \sigma.\pi.$, είναι $\mu(A) = 0$, και άρα Φ εργοδικό, που ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. □

Πρόταση 4.3.4. *Έστω Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ εργοδικό δυναμικό σύστημα. Θεωρούμε τον τελεστή T_φ στον χώρο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε όλες οι ιδιοτιμές του T_φ είναι απλές και αποτελούν υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας της περιφέρειας του κύκλου $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.*

Απόδειξη. Το Φ είναι εργοδικό άρα (Πρόταση 4.3.3.) ο T_φ έχει απλή ιδιοτιμή το 1. Αν λ είναι ιδιοτιμή του T_φ και $T_\varphi f = \lambda f$, $T_\varphi g = \lambda g$ για f, $g \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \neq 0$ τότε $T_\varphi(f/g) = f/g$ άρα $f/g = c$, $c \in \mathbb{C}$ σταθερά. Άρα λ απλή ιδιοτιμή με λ τυχόν, συνεπώς ο T_φ έχει μόνο απλές ιδιοτιμές. Ακόμα, αν $T_\varphi f = \lambda_1 f$, $T_\varphi g = \lambda_2 g$ τότε $T_\varphi(f/g) = (\lambda_1/\lambda_2)(f/g)$ δηλαδή $\lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} = \lambda_1/\lambda_2$ ιδιοτιμή και από Πρόταση 4.1.5. γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του T_φ έχουν απόλυτη τιμή 1. Τότε, $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 1, |\lambda_1/\lambda_2| = 1$, άρα οι ιδιοτιμές είναι υποομάδα της $(K, \cdot)$.

Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X. Με $\mathcal{M}(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο των μέτρων πιθανότητας στο X. Τα μέτρα αυτά είναι κανονικά (ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [17]). Έστω $L(X)$ ο χώρος των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων από το $\mathcal{C}(X)$ στο $\mathbb{R}$ (όπου $\mathcal{C}(X)$ είναι ο χώρος Banach των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων) με τις ιδιότητες: $i)$ αν $f \geq 0$ τότε $L(f) \geq 0$ και $ii)$ $L(1) = 1$. Η συνάρτηση $L : \mathcal{M}(X) \to L(X)$ με $L(\mu) = L_\mu$, όπου $L_\mu(f) = \int f d\mu$ για κάθε $f \in \mathcal{C}(X)$, είναι 1-1 και επί (Θεώρημα 2.5.23.). Άρα εφοδιάζοντας τον $\mathcal{C}(X)^*$ με την w^*-τοπολογία ($\mu_n \to \mu$ αν και μόνο αν $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$) η οποία είναι μετρική, έχουμε ένα μετρικό χώρο στον οποίο μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον $\mathcal{M}(X)$ (ταυτίζοντάς τον με τον $L(X)$) ως ένα συμπαγές υποσύνολό του.

Αν $\varphi : X \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση, ορίζουμε $\varphi(\mu)$ για $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ως ακολούθως

$$\varphi(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}, \text{ ή}$$

$$\int f(x) d\varphi(\mu)(x) = \int f(\varphi(x)) d\mu(x), \text{ για κάθε } f \in \mathcal{C}(X).$$

Έστω $\mathcal{J}(\varphi)$ το σύνολο των μέτρων πιθανότητας μ τα οποία ικανοποιούν την σχέση $\varphi(\mu) = \mu$ (τα οποία καλούνται φ-**αναλλοίωτα**). Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι το $\mathcal{J}(\varphi)$ δεν είναι ποτέ κενό αφού μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε φ-αναλλοίωτα μέτρα. Για παράδειγμα, αν ν είναι τυχαίο μέτρο πιθανότητας, θεωρώντας

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\nu, \text{ έχουμε ότι κάθε υπακολουθιακό όριο της } (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

στον $\mathcal{M}(X)$ είναι φ-αναλλοίωτο (όπως θα δούμε και στην Πρόταση 10.0.1. του κεφαλαίου 10). Ακόμα το $\mathcal{J}(\varphi)$ είναι συμπαγές, κυρτό σύνολο και άρα από Θεώρημα Krein-Milman παράγεται από τα ακραία σημεία του. Η ακόλουθη πρόταση είναι ένας ακόμα χαρακτηρισμός για το πότε ένα δυναμικό σύστημα είναι εργοδικό.

Πρόταση 4.3.5. *Το μέτρο μ είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathcal{J}(\varphi)$ αν και μόνο αν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι εργοδικό.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δεν είναι εργοδικό, και θεωρούμε $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\varphi^{-1}(A) = A$ και $0 < \mu(A) < 1$. Αν θέσουμε $\alpha = \mu(A)$ και

$$\mu'(B) = \frac{1}{\alpha}\mu(B \cap A), \quad \mu''(B) = \frac{1}{1-\alpha}\mu(B \setminus A) \text{ για } B \in \mathcal{A},$$

τότε έχουμε $\mu = \alpha\mu' + (1-\alpha)\mu''$, με $\mu' \neq \mu''$ και $0 < \alpha < 1$. Άρα το μ δεν είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{J}(\varphi)$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το μ δεν είναι ακραίο. Τότε, θα υπάρχουν μέτρα μ', $\mu'' \in \mathcal{J}(\varphi)$ ώστε $\mu = \alpha\mu' + (1-\alpha)\mu''$, με $0 < \alpha < 1$. Τότε $\mu \geq \alpha\mu'$, δηλαδή το μ' είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ. Από Θεώρημα Radon-Nikodym γράφουμε

$$\mu'(A) = \int_A f d\mu \text{ για κάποια μοναδική } \mu - \sigma.\pi. \ f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

$$\text{Ισχύει ακόμα ότι, } \mu'(A) = \mu'(\varphi^{-1}(A)) = \int_{\varphi^{-1}(A)} f d\mu = \int_A f \circ \varphi d\mu.$$

Από μοναδικότητα, έχουμε $f = f \circ \varphi = T_\varphi f$ με T_φ εργοδικό, άρα η f θα είναι σταθερά $\mu - \sigma.\pi.$. Τότε $\mu = c\mu'$, $c \geq 0$ άρα $1 = \mu(X) = c\mu'(X) = c$ δηλαδή $\mu = \mu'$ από το οποίο έχουμε ότι μ ακραίο, άτοπο. □

Κεφάλαιο 5

Ασθενώς Mixing Δυναμικά Συστήματα

Η εργοδικότητα ενός δυναμικού συστήματος είναι μια βασική ιδιότητα που είναι απαραίτητη για την απόδειξη λεπτότερων εργοδικών αποτελεσμάτων, όπως γίνεται κατανοητό και από τα επόμενα κεφάλαια. Όμως η ιδιότητα αυτή ενός δυναμικού συστήματος Φ, δεν μεταφέρεται απαραίτητα στο δυναμικό σύστημα γινόμενο Φ×Φ. Τα εργοδικά δυναμικά συστήματα τα οποία έχουν την επιπλέον ιδιότητα το γινόμενό τους να είναι εργοδικό δυναμικό σύστημα, είναι τα ασθενώς mixing δυναμικά συστήματα. Στην παράγραφο αυτή, χαρακτηρίζουμε πλήρως τα συστήματα αυτά, δοθέντος ότι αυτή η έννοια είναι κεντρική για την απόδειξη θεμελιωδών εργοδικών θεωρημάτων στη Θεωρία Μέτρου, όπως το θεώρημα του Furstenberg (Θεώρημα 9.0.1.).

5.1 $*-$Σύγκλιση Μιγαδικών Ακολουθιών

Προκειμένου να οριστεί η έννοια του ασθενώς mixing δυναμικού συστήματος, εισάγεται η έννοια της $*-$σύγκλισης μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών. Η ενδιαφέρουσα αυτή σύγκλιση ορίζεται και χαρακτηρίζεται σε αυτή την παράγραφο.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $E \subseteq \mathbb{N}$. Η* **πάνω πυκνότητα** *(αντίστοιχα* **κάτω πυκνότητα***) του E, είναι ο αριθμός*

$$\overline{d}(E) = \limsup_n \frac{|E \cap \{0, ..., n-1\}|}{n},$$

όπου με $|A|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο ενός συνόλου A

$$(\textit{αντίστοιχα}\ \ \underline{d}(E) = \liminf_n \frac{|E \cap \{0, ..., n-1\}|}{n}).$$

Αν ισχύει $\overline{d}(E) = \underline{d}(E)$, *την κοινή τιμή την καλούμε* **πυκνότητα** *του* E *και την συμβολίζουμε με* $d(E)$.

Ορισμός 5.1.2. *Έστω* $E \subseteq \mathbb{Z}$. *Η* **πάνω πυκνότητα Banach** *(αντίστοιχα* **κάτω πυκνότητα Banach***) του* E, *είναι ο αριθμός*

$$d^*(E) = \limsup_{n-m\to\infty} \frac{|E \cap \{m, ..., n-1\}|}{n-m},$$

$$(\textit{αντίστοιχα} \;\; d_*(E) = \liminf_{n-m\to\infty} \frac{|E \cap \{m, ..., n-1\}|}{n-m}).$$

Ορισμός 5.1.3. *Έστω* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ *και* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Η ακολουθία* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *έχει* $*-$*όριο το* α *(γράφουμε* $\alpha = *-\lim_n \alpha_n$*), αν υπάρχει* $J \subseteq \mathbb{N}$ *με* $d(J) = 0$ *ώστε*

$$\lim_{n\notin J} \alpha_n = \alpha, \;\; \textit{δηλαδή αν για κάθε } \varepsilon > 0 \textit{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \textit{ ώστε}$$

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \;\; \textit{για κάθε } n \geq n_0 \textit{ και } n \notin J.$$

Παρατηρήσεις 5.1.4. *Έστω* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ *και* $\alpha \in \mathbb{C}$.
1) *Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε άμεσα ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
i) $*-\lim_n \alpha_n = \alpha$
ii) $*-\lim_n(\alpha_n - \alpha) = 0$
iii) $*-\lim_n |\alpha_n - \alpha| = 0$
iv) $*-\lim_n |\alpha_n - \alpha|^l = 0$ *για κάθε* $l \in \mathbb{N}^*$.

$$2) \;\textit{Αν} \;\; \lim_{n\notin J} \alpha_n = \alpha, \;\; \textit{τότε} \;\; \lim_{n\notin J} \frac{1}{n} \sum_{k\in\{0,...,n-1\}\cap J^c} |\alpha_k - \alpha| = 0.$$

Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε* $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon/2$ *για κάθε* $n \geq n_0$ *και* $n \notin J$. *Έστω* $n > n_0$. *Τότε,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0,\, k\notin J}^{n-1} |\alpha_k - \alpha| = \frac{1}{n}\sum_{k=0,\, k\notin J}^{n_0-1} |\alpha_k - \alpha| +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0,\, k\notin J}^{n-1} |\alpha_k - \alpha| < \frac{1}{n}\sum_{k=0,\, k\notin J}^{n_0-1} |\alpha_k - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το πρώτο κλάσμα τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$, *άρα υπάρχει* $n_1 > n_0 \in \mathbb{N}^*$ *ώστε*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0,\, k\notin J}^{n_0-1} |\alpha_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; \textit{για κάθε } n > n_1,$$

$$\text{συνεπώς}\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0,\ k\notin J}^{n-1}|\alpha_k-\alpha|<\varepsilon \ \text{ για κάθε } \ n>n_1, \ \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{C}$ μια φραγμένη ακολουθία, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) $*-\lim_n \alpha_n=\alpha$.
ii) $*-\lim_n |\alpha_n-\alpha|^l=0$ *για κάθε* $l\in\mathbb{N}^*$.

iii) $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\alpha_k-\alpha|=0$.

$$iv)\ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^l=\alpha^l \ \text{ για κάθε } \ l\in\mathbb{N}.$$

v) Για κάθε $\varepsilon>0$ *αν* $J(\varepsilon):=\{n\in N \mid |\alpha_n-\alpha|\geq\varepsilon\}$, *τότε* $d(J(\varepsilon))=0$.

$$vi)\ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k=\alpha \quad \text{και} \quad \lim_n\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2=\alpha^2.$$

Απόδειξη. *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* $*-\lim\limits_n \alpha_n=\alpha$ αν και μόνο αν $*-\lim\limits_n |\alpha_n-\alpha|=0$,

ισοδύναμα, $*-\lim_n|\alpha_n-\alpha|^l=0$ για κάθε $l\in N^*$.

i) $\Rightarrow$ *iii)* Έστω $M>0$ ώστε $|\alpha_n|\leq M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Από υπόθεση, υπάρχει $J\subseteq\mathbb{N}$ με $d(J)=0$ ώστε $\lim_{n\notin J}\alpha_n=\alpha$. Θεωρούμε τα σύνολα $J_n:=J\cap\{0,1,...,n-1\}$ για $n\geq1$.

$$\text{Τότε}\ \ 0\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\alpha_k-\alpha|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0,\ k\notin J}^{n-1}|\alpha_k-\alpha|+\frac{1}{n}\sum_{k\in J_n}|\alpha_k-\alpha|\leq$$

$$\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0,\ k\notin J}^{n-1}|\alpha_k-\alpha|+\frac{1}{n}(M+|\alpha|)|J_n|\to0 \quad \text{καθώς } n\to\infty,$$

$$\text{διότι}\ \ \frac{|\,J_n\,|}{n}\to0 \ \text{ και } \ \frac{1}{n}\sum_{k=0,\ k\notin J}^{n-1}|\alpha_k-\alpha|\to0 \ \ (\text{Παρατήρηση 5.1.4.}).$$

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Το ζητούμενο είναι τετριμμένο για $l=0,\ l=1$. Έστω $l\geq2$. Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε

$\max\{|\alpha_n|, |\alpha|\} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|\alpha_m^l - \alpha^l| = |\alpha_m - \alpha||\alpha_m^{l-1} +$ $+ \alpha_m^{l-2}\alpha + ... + \alpha_m \alpha^{l-2} + \alpha^{l-1}| \leq |\alpha_m - \alpha| l M^{l-1}$, $m = 0, 1, ..., n-1$.

$$\text{Τότε} \quad \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^l - \alpha^l \right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} | \alpha_k^l - \alpha^l | \leq (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k - \alpha|) l M^{l-1} \to 0$$

$$\text{καθώς } n \to \infty, \text{ και άρα έχουμε } \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^l = \alpha^l, \ \ l \in \mathbb{N}.$$

$v) \Rightarrow vi)$ Προφανές.

$vi) \Rightarrow v)$ Ισχύει $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = \alpha$ και $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 = \alpha^2$.

Έχουμε $(\alpha_m - \alpha)^2 = (\alpha_m^2 - \alpha^2) + 2\alpha(\alpha - \alpha_m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k^2 - \alpha^2) + 2\alpha \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha - \alpha_k) \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $d(J(\varepsilon)) > 0$. Τότε υπάρχουν $A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\varepsilon_1 > 0$ ώστε $|J_n(\varepsilon)| > n\varepsilon_1$ για κάθε $n \in A$, όπου $J_n(\varepsilon) := J(\varepsilon) \cap \{0, 1, ..., n-1\}$.

$$\text{Για κάθε } n \in A \text{ έχουμε } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k \in J_n(\varepsilon)} (\alpha_k - \alpha)^2 +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k \in (J_n(\varepsilon))^c} (\alpha_k - \alpha)^2 \geq \frac{1}{n}\sum_{k \in J_n(\varepsilon)} (\alpha_k - \alpha)^2 \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \frac{|J(\varepsilon) \cap \{0, 1, ..., n-1\}|}{n} = \varepsilon^2 \frac{|J_n(\varepsilon)|}{n} > \varepsilon^2 \varepsilon_1.$$

$$\text{Άρα το άθροισμα } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha)^2 \text{ δεν συγκλίνει στο } 0 \text{ καθώς } n \to \infty,$$

άτοπο. Επομένος $d(J(\varepsilon)) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

$v) \Rightarrow i)$ Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $d(J(\varepsilon)) = 0$ από υπόθεση, έχουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία δεικτών k_m, $m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $|J_n(\frac{1}{m})| < \frac{n}{m}$ για $n \geq k_m$ (από τον ορισμό του d για $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$). Θέτουμε $J = \bigcup_{m=1}^{\infty} (J(\frac{1}{m}) \cap [k_m, \infty))$.

Τότε για κάθε m, $n \geq k_m$, $n \notin J$ έχουμε $|\alpha_n - \alpha| < \frac{1}{m}$. Αν $k \in J_n$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $k_m \leq n < k_{m+1}$. Τότε,

$$k \notin J(\frac{1}{l}) \cap [k_l, \infty) \text{ για κάθε } l \geq m+1 \text{ και } k \in J_n(\frac{1}{m_0}) \text{ για } 1 \leq m_0 \leq m,$$

$$\text{άρα } J_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} J_n(\frac{1}{j}). \text{ Όμως, } J_n(\frac{1}{p}) \subseteq J_n(\frac{1}{m}) \text{ για } 1 \leq p \leq m, \text{ άρα } J_n \subseteq J_n(\frac{1}{m}).$$

$$\text{Τότε } \frac{|J_n|}{n} < \frac{1}{m} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ (αφού όταν } n \to \infty \text{ και } m \to \infty).$$

Δείξαμε ότι ισχύει $d(J) = 0$, άρα $\alpha = \lim_{n \notin J} \alpha_n$, δηλαδή $\alpha = * - \lim_n \alpha_n$.

□

Πρόταση 5.1.6. *Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένες μιγαδικές ακολουθίες ώστε*

$$* - \lim_n a_n = a \text{ και } * - \lim_n b_n = b, \text{ τότε } * - \lim_n (a_n b_n) = ab.$$

Απόδειξη. Από υπόθεση υπάρχουν J_1, $J_2 \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $d(J_1) = 0$, $d(J_2) = 0$ με

$$\lim_{n \notin J_1} a_n = a, \text{ και } \lim_{n \notin J_2} b_n = b. \text{ Τότε, } \lim_{n \notin J_1 \cup J_2} a_n b_n = ab. \text{ Πράγματι,}$$

$$0 \leq \overline{d}(J_1 \cup J_2) \leq \overline{d}(J_1) + \overline{d}(J_2) = d(J_1) + d(J_2) = 0. \text{ Άρα } d(J_1 \cup J_2) = 0.$$

Εύκολα δείχνουμε ότι $\lim_{n \notin J_1 \cup J_2} a_n b_n = ab$, δηλαδή $* - \lim_n (a_n b_n) = ab$.

□

Λήμμα 5.1.7 (Koopman-von Neumann,1932). *Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία, με $\alpha_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

$$\textit{Τότε } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = 0 \textit{ αν και μόνο αν } * - \lim_n \alpha_n = 0.$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τα σύνολα $E_m = \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k > \frac{1}{m}\}$ και παρατηρούμε ότι $E_m \subseteq E_{m+1}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$. Κάθε E_m έχει πυκνότητα μηδέν, διότι

$$0 \leq \lim_n \frac{|E_m \cap \{0, 1, ..., n-1\}|}{n} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{E_m}(k) \leq m(\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k) = 0.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ μπορούμε να επιλέξουμε $i_m > 0$ ώστε $0 =: i_0 < i_1 < i_2 < ...$ και $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{E_m}(k) < \frac{1}{m}$ για $n \geq i_{m-1}$.

Ισχυρισμός 1. Ορίζουμε $E = \bigcup_{m=1}^{\infty}(E_m \cap [i_{m-1}, i_m))$. Τότε $d(E) = 0$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Για κάθε $m \geq 2$ ισχύει $E_{m-1} \supseteq ... \supseteq E_1$. Άρα

$\displaystyle\sum_{k=0}^{i_{m-1}-1} X_E(k) \leq \sum_{k=0}^{i_{m-1}-1} X_{E_{m-1}}(k)$. Για $n \in \mathbb{N}^*$ με $n-1 < i_m$ ισχύει

$$\sum_{k=i_{m-1}}^{n-1} X_E(k) = \sum_{k=i_{m-1}}^{n-1} X_{E_m}(k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} X_{E_m}(k).$$

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ με $i_{m-1} < n \leq i_m$. Τότε $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_E(k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{i_{m-1}-1} X_E(k) +$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=i_{m-1}}^{n-1} X_E(k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{i_{m-1}-1} X_{E_{m-1}}(k) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{E_m}(k) <$$

$$< \frac{1}{i_{m-1}}\sum_{k=0}^{i_{m-1}-1} X_{E_{m-1}}(k) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{E_m}(k) < \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \to 0 \text{ για } n \to \infty,$$

αφού για $n \to \infty$ έχουμε ότι $m \to \infty$, οπότε $\displaystyle\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_E(k) = 0$,

και άρα $d(E) = 0$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 2. $\lim_{n \notin E} \alpha_n = 0$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \notin E$. Τότε υπάρχει $m_n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $n \in [i_{m_n-1}, i_{m_n})$, οπότε $n \notin E_{m_n}$ και άρα

$\displaystyle\alpha_n \leq \frac{1}{m_n}$. Καθώς για $n \to \infty$ έχουμε $m_n \to \infty$, ισχύει ότι $\displaystyle\lim_{n \notin E} \alpha_n = 0$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό και ολοκληρώνει την κατεύθυνση.

($\Leftarrow$) Ισχύει άμεσα από την Πρόταση 5.1.5. $\square$

Λήμμα 5.1.8 (van der Corput)**.** *Έστω $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ χώρος Hilbert και $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}$ μια φραγμένη αμφίπλευρη ακολουθία. Αν για κάθε $h \in \mathbb{Z}^*$ έχουμε*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_k, x_{k+h} >= 0, \quad \textit{τότε} \quad \lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\| = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $M > 0$ ώστε $\|x_n\| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Σταθεροποιούμε $H \in \mathbb{N}^*$ με $M^2/H < \varepsilon^2/2$. Για $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} x_{k+h}).$$

Ισχυρισμός 1. $\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - y_n\| = 0.$

Απόδειξη ισχυρισμού. Για $n > H$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - y_n = \frac{1}{n}[x_1 + ... + x_n - \frac{1}{H}(\sum_{h=1}^{H} x_{1+h} + ... + \sum_{h=1}^{H} x_{n+h})] =$$

$$= \frac{1}{nH}[Hx_1 + (H-1)x_2 + ... + x_H - Hx_{n+1} - (H-1)x_{n+2} - ... - x_{n+H}].$$

Τότε $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - y_n\| \leq \frac{M}{nH}H(H+1) = \frac{M(H+1)}{n} \to 0$, καθώς $n \to \infty$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι δεν χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση που μας δίνει το λήμμα.

Ισχυρισμός 2. $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+l}, x_{k+l+h} >= 0$ για $l \in \mathbb{N}$ σταθερό, $h \in \mathbb{Z}^*$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+l}, x_{k+l+h} >=$

$$= (\frac{1}{l+n}\sum_{k=1}^{l+n} < x_k, x_{k+h} > - \frac{1}{l+n}\sum_{k=1}^{l} < x_k, x_{k+h} >)\frac{l+n}{n} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$, αφού από υπόθεση $\frac{1}{l+n}\sum_{k=1}^{l+n} < x_k, x_{k+h} > \to 0$,

$$\frac{1}{l+n}\sum_{k=1}^{l+n} < x_k, x_{k+h} > \to 0, \text{ και } \frac{l+n}{n} \to 1 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Ισχυρισμός 3. $\lim_n \|y_n\| < \varepsilon$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν $\alpha_n^{(l,h)} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+l}, x_{k+l+h} >$, $l \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{Z}^*$,

από Ισχυρισμό 2 έχουμε $\alpha_n^{(l,h)} \to 0$, καθώς $n \to \infty$.

Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $\dfrac{2}{H^2}Re(\sum_{1\le l\le H-1,\, 1\le h\le H-l} \alpha_n^{(l,h)}) < \dfrac{\varepsilon^2}{2}$. Τότε

από τριγωνική ανισότητα και ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι :

$$\|y_n\|^2 = \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} x_{k+h})\|^2 \le (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} x_{k+h}\|)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} x_{k+h}\|^2 \sum_{k=1}^{n} 1^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} x_{k+h}\|^2 =$$

$$= \frac{1}{nH^2}(< \sum_{h=1}^{H} x_{1+h}, \sum_{h=1}^{H} x_{1+h} > + ... + < \sum_{h=1}^{H} x_{n+h}, \sum_{h=1}^{H} x_{n+h} >) =$$

$$= \frac{1}{nH^2}[\|x_2\|^2 + 2\|x_3\|^2 + ... + (H-1)\|x_H\|^2 + H\|x_{H+1}\|^2 + ... +$$
$$+ H\|x_{n+1}\|^2 + (H-1)\|x_{n+2}\|^2 + ... + 2\|x_{n+H-1}\|^2 + \|x_{n+H}\|^2] +$$

$$+ \frac{2}{H^2}Re(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{H-1}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+1}, x_{k+1+l} > + ... +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+H-2}, x_{k+H-2+l} > + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+H-1}, x_{k+H} >) \le$$

$$\le \frac{HnM^2}{H^2 n} + \frac{2}{H^2}Re(\sum_{1\le l\le H-1,\, 1\le h\le H-l} \alpha_n^{(l,h)}) < \frac{M^2}{H} + \frac{\varepsilon^2}{2}, \text{ άρα}$$

$\lim\limits_n \|y_n\| \leq (\frac{M^2}{H} + \frac{\varepsilon^2}{2})^{1/2} < \varepsilon$, που ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Τέλος, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - y_n\| + \|y_n\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 5.1.9. *Έστω $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ χώρος Hilbert και $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}$ μια φραγμένη αμφίπλευρη ακολουθία. Αν για κάθε $h \in \mathbb{Z}^*$ ισχύει:*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_k, x_{k+h} >= \alpha_h \ \textit{και} \ * - \lim_h \alpha_h = 0, \ \textit{τότε} \ \lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\| = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Πρόταση 5.1.5. έχουμε ότι:

$$* - \lim_h \alpha_h = 0 \text{ αν και μόνο αν } \lim_H \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} |\alpha_h| = 0, \text{ άρα}$$

$$\text{υπάρχει } H_1 \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } 2\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} |\alpha_h| < \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ για κάθε } H \geq H_1.$$

Θεωρούμε $M > 0$ ώστε $\|x_n\| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και $H_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $M^2/H_2 < \varepsilon^2/2$. Για $H \in \mathbb{N}^*$ με $H > \max\{H_1, H_2\}$ ορίζουμε

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} x_{k+h}) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έχουμε $\lim\limits_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - y_n\| = 0$ ανάλογα με την απόδειξη στο Λήμμα 5.1.8.

Ακόμα, για κάθε $l \in \mathbb{N}$ σταθερό και $h \in \mathbb{Z}^*$, $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_{k+l}, x_{k+l+h} >=$

$$= \lim_n (\frac{1}{l+n}\sum_{k=1}^{l+n} < x_k, x_{k+h} > - \frac{1}{l+n}\sum_{k=1}^{l} < x_k, x_{k+h} >)\frac{l+n}{n} = \alpha_h.$$

Όπως πριν, $\lim\limits_n \|y_n\|^2 \leq \frac{M^2}{H} + \frac{2}{H^2}Re[(H-1)\alpha_1 + (H-2)\alpha_2 + ... + \alpha_{H-1}] \leq$

$$\leq \frac{M^2}{H} + 2\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}|\alpha_h| < \frac{M^2}{H} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2, \ \text{ δηλαδή } \ \lim_n \|y_n\|^2 = 0$$

$$\text{και τότε } \ \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - y_n\| + \|y_n\| \to 0, \ \text{ καθώς } \ n \to \infty.$$

Άρα έπεται το ζητούμενο. □

5.2 Mixing, Ασθενώς Mixing Δυναμικά Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή ορίζεται η έννοια του ασθενώς mixing δυναμικού συστήματος και αποδεικνύονται χαρακτηριστικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών, αρχίζοντας από τις πιο προφανείς έως τις πιο εκλεπτισμένες, όπως η ιδιότητα του θεωρήματος του Furstenberg (Θεώρημα 9.0.1) που αποδεικνύεται στο Πόρισμα 5.2.8.

Ορισμός 5.2.1. *Το δυναμικό σύστημα Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται* **ισχυρό mixing** *αν*

$$\lim_n \mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{για κάθε} \quad A,\ B \in \mathcal{A}.$$

Το Φ είναι **ασθενώς mixing** *αν για κάθε $A,\ B \in \mathcal{A}$ ισχύει*

$$* - \lim_n \mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα. Θεωρούμε τον τελεστή T_φ στον χώρο $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αν ο T_φ έχει αριθμήσιμο φάσμα Lebesgue (Ορισμός 2.5.15.) στο συμπλήρωμα του χώρου των σταθερών συναρτήσεων, τότε Φ ισχυρό mixing.*

Απόδειξη. Έστω $\{f_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}}$ ορθογώνια βάση του $X = \{f - \int_X f d\mu \mid f \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$. Αν η f είναι σταθερή, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N},\ g \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε $< T^n_\varphi f, g >=< f, g >=< f, 1 >< 1, g >$. Ακόμα, αν $f = f_{i,j}$ και $g = f_{p,\,q}$ τότε $< T^n_\varphi f,\ g >=< f_{i,j+n},\ f_{p,\,q} >= 0$ για n αρκετά μεγάλο. Καθώς η 1 (σταθερή συνάρτηση ίση με 1 $\mu-\sigma.\pi.$) παράγει τις σταθερές συναρτήσεις και οι $\{f_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}}$ τον X, έχουμε ότι το σύνολο $\{\{f_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}}, 1\}$ παράγει τον $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Για τυχαίες $f,\ g \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε

$$f = c_1 + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}} a_{ij} f_{i,j}, \ \text{ και } \ g = c_2 + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}} b_{ij} f_{i,j}$$

όπου $c_1, c_2, \{a_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}}, \{b_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}$.

Τότε, $T_\varphi^n f = c_1 + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}} a_{ij} f_{i,j+n}$ και $< f, 1 >= c_1, < 1, g >= \overline{c_2}$,

$$< c_1, g >= c_1\overline{c_2} \quad \text{και επειδή} \quad \lim_n < \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}} a_{ij} f_{i,j+n},\ g >= 0$$

(από συνέχεια εσωτερικού γινομένου διότι $< f_{i,j+n},\ f_{p,\,q} >= 0$ για μεγάλο n)

$$\text{έχουμε} \quad \lim_n < T_\varphi^n f,\ g >=< c_1, g > + \lim_n < \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}} a_{ij} f_{i,j+n},\ g >=$$

$$= c_1\overline{c_2} =< f, 1 >< 1, g > .$$

Έστω $A,\ B \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε $f = X_B,\ g = X_A \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και έχουμε

$$\lim_n \mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) = \lim_n \int X_{\varphi^{-n}(B)} X_A d\mu = \lim_n \int (X_B \circ \varphi^n) X_A d\mu =$$

$$= \lim_n < T_\varphi^n X_B, X_A >=< X_A, 1 >< 1, X_B >= \mu(A)\mu(B)$$

από τα προηγούμενα. Άρα Φ ισχυρό mixing. □

Παρατηρήσεις 5.2.3. 1) *Οι σταθερές συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 (αφού T_φ γραμμικός και $T_\varphi(1) = 1$). Άρα ο T_φ δεν μπορεί να έχει συνεχές φάσμα ή αριθμήσιμο φάσμα Lebesgue σε χώρο που περιέχει τις σταθερές.*
2) *Σαν συμπλήρωμα του χώρου των σταθερών συναρτήσεων θεωρούμε τον (μοναδικό) χώρο $X \subseteq L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) = X \oplus \{$σταθερές συναρτήσεις$\}$, όπου κάθε συνάρτηση του X είναι κάθετη στην σταθερή συνάρτηση 1.*
3) *Αν X ο προηγούμενος χώρος, τότε $X = \{f - \int_X f d\mu \mid f \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$. Πράγματι, έστω $g \in \{f - \int_X f d\mu \mid f \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$. Τότε για $c \in \mathbb{C}$ έχουμε $< g, c >= \overline{c} < g, 1 >= \overline{c} \int_X g\overline{1} d\mu = \overline{c}(\int_X f d\mu - \int_X f d\mu) = 0$, άρα $g \perp c$, $c \in \mathbb{C}$ δηλαδή $g \in X$. Αντίστροφα, αν $f \in X$ τότε $< f, 1 >= 0$ δηλαδή $\int_X f d\mu = 0$. Τότε έχουμε $f = f - \int_X f d\mu$ και έπεται το συμπέρασμα.* □

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω Φ=$(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) Το Φ είναι ασθενώς mixing.

$$ii)\ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\mu(A\cap\varphi^{-k}(B))-\mu(A)\mu(B)|=0 \text{ για κάθε } A,\ B\in\mathcal{A}.$$

$$iii)\ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap\varphi^{-k}(B))^2=\mu(A)^2\mu(B)^2 \text{ για κάθε } A,\ B\in\mathbb{A}.$$

$$iv) * -\lim_n \int (T_\varphi^n f)\overline{g}d\mu = (\int f d\mu)(\overline{\int g d\mu}), \text{ για } f,\ g\ \in\ L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu).$$

$$v)\ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|<T_\varphi^k f,g>-<f,1><1,g>|=0, \text{ για } f,\ g\in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu).$$

vi) Το δυναμικό σύστημα $\Phi^2 := (X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\times\mu, \varphi\times\varphi)$, όπου $(\varphi\times\varphi)(x,y)=(\varphi(x),\varphi(y))$ για κάθε $x,\ y\in X$, είναι εργοδικό.
vii) Φ^2 είναι ασθενώς mixing.
viii) $\Phi{\times}S$ είναι εργοδικό στο $X\times Y$ για κάθε εργοδικό $S=(Y,\mathcal{B},\nu,s)$.

Επιπλέον, αν το Φ είναι αντιστρέψιμο δυναμικό σύστημα, τότε τα προηγούμενα είναι ισοδύναμα και με τα ακόλουθα:
ix) Ο T_φ έχει συνεχές φασμα στο συμλήρωμα του χώρου των σταθερών συναρτήσεων.
x) Ο T_φ είναι εργοδικός και δεν έχει άλλες ιδιοτιμές εκτός της 1.

Απόδειξη. Οι ισοδυναμίες $i) \Leftrightarrow ii)$ και $iv) \Leftrightarrow v)$ έπονται από την Πρόταση 5.1.5. για τις ακολουθίες με γενικούς όρους $\alpha_n=\mu(A\cap\varphi^{-n}(B))$ και $\beta_n = = \int(T_\varphi^n f)\overline{g}d\mu$, $n\in\mathbb{N}$, αντίστοιχα, όπου $A,\ B\in\mathcal{A}$ και $f,\ g\in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$.

$i) \Rightarrow iv)$ Έστω $A,\ B\in\mathcal{A}$. Τότε $* - \lim_n \mu(A\cap\varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$, άρα αν $f=X_B$ και $g=X_A\in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$, παρατηρώντας ότι $X_B\circ\varphi^n = = X_{\varphi^{-n}(B)}$, έχουμε από την $i)$ ότι $* - \lim_n \int(f\circ\varphi^n)\overline{g}d\mu =$

$$= * -\lim_n \mu(A\cap\varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) = (\int f d\mu)(\overline{\int g d\mu}).$$

Εύκολα έχουμε το συμπέρασμα για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $f,\ g\in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Έστω $f,\ g\in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Υποθέτουμε ότι $g\geq 0$ και ότι

$f = X_B$, $B \in \mathcal{A}$. Η $g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και είναι θετική, άρα για $\varepsilon > 0$ υπάρχει απλή, θετική συνάρτηση h_ε ώστε $| g - h_\varepsilon |< \varepsilon$. Τότε,

$$\int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu - \varepsilon \leq \int T^n_\varphi(X_B) g d\mu \leq \int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu + \varepsilon.$$

Το $*-$όριο της ακολουθίας $\int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu$ υπάρχει, άρα υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $J \subseteq \mathbb{N}$, με $d(J) = 0$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $n \notin J$ να ισχύει

$$* - \lim_n \int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu - \varepsilon < \int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu < * - \lim_n \int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu + \varepsilon.$$

Ακόμα, ισχύουν $* - \lim_n \int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu = \mu(B) \int h_\varepsilon d\mu \leq \mu(B) \int g d\mu + \varepsilon$,

$$\text{και} \quad * - \lim_n \int T^n_\varphi(X_B)h_\varepsilon d\mu \geq \mu(B) \int g d\mu - \varepsilon, \ \text{ άρα έχουμε}$$

$$\left| \int T^n_\varphi(X_B) g d\mu - \mu(B) \int g d\mu \right| \leq 3\varepsilon \ \text{ για κάθε } \ n \geq n_0, \ n \notin J,$$

από όπου έπεται το ζητούμενο. Άρα για $g \geq 0$ και f απλή θα ισχύει το προηγούμενο από γραμμικότητα.

Αν $g \geq 0$ και $f \geq 0$, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει h_ε απλή, θετική συνάρτηση ώστε $|f - h_\varepsilon| < \varepsilon$. Τότε

$$\int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu - \varepsilon \int g d\mu \leq \int T^n_\varphi f g d\mu \leq \int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu + \varepsilon \int g d\mu.$$

Το $*-$όριο της ακολουθίας $\int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu$ υπάρχει, άρα υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $J \subseteq \mathbb{N}$, με $d(J) = 0$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $n \notin J$ να ισχύει

$$* - \lim_n \int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu - \varepsilon < \int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu < * - \lim_n \int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu + \varepsilon,$$

$$\text{όπου} \quad * - \lim_n \int T^n_\varphi(h_\varepsilon) g d\mu = \left(\int h_\varepsilon d\mu\right)\left(\int g d\mu\right). \ \text{ Έχουμε}$$

$$\left(\int h_\varepsilon d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) \leq \left(\int f d\mu + \varepsilon\right)\left(\int g d\mu\right) = \left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) + \varepsilon \int g d\mu$$

$$\text{και} \ \left(\int h_\varepsilon d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) \geq \left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) - \varepsilon \int g d\mu, \ \text{ άρα για κάθε } \ n \geq n_0,$$

$$n \notin J \ \text{ ισχύει } \ \left| \int T^n_\varphi f g d\mu - \left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) \right| \leq \varepsilon\left(2 \int g d\mu + 1\right)$$

και έχουμε το ζητούμενο διότι $g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ θετική, άρα $0 < \int g d\mu < \infty$.

Στην γενική περίπτωση, αν $f = u_1 + iv_1$ και $g = u_2 + iv_2$ γράφοντας $f = u_1^+ - u_1^- + i(v_1^+ - v_1^-)$, $g = u_2^+ - u_2^- + i(v_2^+ - v_2^-)$, όπου οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι θετικές, παίρνουμε το συμπέρασμα από γραμμικότητα.

$iv) \Rightarrow i)$ Έστω $A,\ B \in \mathcal{A}$ θεωρούμε τις $f = X_B,\ g = X_A$ και από $iv)$

$$\text{έχουμε} \quad * - \lim_n \int (f \circ \varphi^n)\overline{g} d\mu = (\int f d\mu)(\overline{\int g d\mu}), \quad \text{οπότε}$$

$$* - \lim_n \mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B), \quad \text{δηλαδή } \Phi \text{ ασθενώς } mixing.$$

$ii) \Leftrightarrow iii)$ Παρατηρούμε ότι αν ισχύει είτε το $ii)$ είτε το $iii)$ ότι το Φ είναι εργοδικό. Πράγματι, αν ισχύει το $ii)$ για $\varphi^{-1}(B) = B,\ B \in \mathcal{A}$ και $A = B^c$

$$\text{έχουμε} \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(B^c \cap \varphi^{-n}(B)) - \mu(B^c)\mu(B)| = 0. \ \text{ τότε}$$

$$\mu(B)(1 - \mu(B)) = 0 \ \text{ δηλαδή } \ \mu(B) \in \{0, 1\}, \ \text{ άρα } \Phi \text{ εργοδικό.}$$

Ενώ αν ισχύει το $iii)$, πάλι για $\varphi^{-1}(B) = B,\ B \in \mathcal{A}$ και $A = B^c$

$$\text{έχουμε} \ \ 0 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(B^c \cap \varphi^{-n}(B))^2 = \mu(B^c)^2 \mu(B)^2.$$

$$\text{Τότε,} \ \ [\mu(B)(1 - \mu(B))]^2 = 0 \ \text{ δηλαδή } \ \mu(B) \in \{0, 1\}, \ \text{ άρα } \Phi \text{ εργοδικό.}$$

$$\text{Έστω } \ A,\ B \in \mathcal{A}. \ \ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap \varphi^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

$$\text{αν και μόνο αν} \ \ * - \lim_n |\mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0, \ \text{ δηλαδή}$$

$$* - \lim_n |\mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)|^2 = 0, \ \text{ ισοδύναμα,}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap \varphi^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)|^2 = 0 \ \text{ (Πρόταση 5.1.5.).}$$

$$\text{Αλλά} \ \ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap \varphi^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)|^2 =$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu(A \cap \varphi^{-k}(B))^2 - 2\mu(A)\mu(B)\mu(A \cap \varphi^{-k}(B))) +$$

$$+\mu(A)^2\mu(B)^2 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \varphi^{-k}(B))^2 -$$

$$-2\mu(A)\mu(B) \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \varphi^{-k}(B)) + \mu(A)^2\mu(B)^2 =$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \varphi^{-k}(B))^2 - 2\mu(A)^2\mu(B)^2 + \mu(A)^2\mu(B)^2 =$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \varphi^{-k}(B))^2 - \mu(A)^2\mu(B)^2 \ \text{ από Πρόταση 4.3.2..}$$

και έπεται η ισοδυναμία.

$i) \Rightarrow vii)$ Αρκεί να δείξουμε την συνθήκη του Ορισμού 5.2.1. για τυχαία μετρήσιμα ορθογώνια $A \times C,\ B \times D$ με $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{A}$ (αφού αυτά παράγουν την $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$). Φ ασθενώς mixing, άρα υπάρχουν $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{N}$ με $d(J_1) = d(J_2) = 0$

$$\text{ώστε} \quad \lim_{n,\, n \notin J_1} |\mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0, \ \text{ και}$$

$\lim_{n,\, n \notin J_2} |\mu(C \cap \varphi^{-n}(D)) - \mu(C)\mu(D)| = 0$. Αν $J = J_1 \cup J_2$, τότε $d(J) = 0$ και

$$\lim_{n \notin J} |(\mu \times \mu)((A \times C) \cap (\varphi \times \varphi)^{-n}(B \times D)) - (\mu \times \mu)(A \times C)(\mu \times \mu)(B \times D)|$$

$$= \lim_{n \notin J} |\mu(A \cap \varphi^{-n}(B))\mu(C \cap \varphi^{-n}(D)) - \mu(A)\mu(C)\mu(B)\mu(D)| \leq$$

$$\leq \lim_{n \notin J} \mu(A \cap \varphi^{-n}(B))|\mu(C \cap \varphi^{-n}(D)) - \mu(C)\mu(D)| +$$

$$+ \lim_{n \notin J} \mu(C)\mu(D)|\mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| \leq$$

$$\leq \lim_{n \notin J} |\mu(C \cap \varphi^{-n}(D)) - \mu(C)\mu(D)| + \lim_{n \notin J} |\mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Άρα Φ^2 ασθενώς mixing.

$vii) \Rightarrow i)$ Έστω Φ^2 ασθενώς mixing. Θα δείξουμε ότι το Φ είναι ασθενώς mixing. Έστω $A,\ B \in \mathcal{A},\ A\times X,\ B\times X \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ τότε από υπόθεση

$$\text{Έχουμε}\ \ * - \lim_n (\mu\times\mu)((A\times X)\cap(\varphi\times\varphi)^{-n}(B\times X)) =$$

$$= (\mu\times\mu)(A\times X)(\mu\times\mu)(B\times X),$$

δηλαδή $\ * - \lim_n \mu(A\cap\varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B),$ άρα Φ ασθενώς *mixing*.

$i) \Rightarrow viii)$ Από Πρόταση 4.3.2. αρκεί για τυχαία $A\times C,\ B\times D$ όπου $A,\ B\in\mathcal{A},\ C,\ D\in\mathcal{B}$ να δείξουμε ότι:

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu\times\nu)((A\times C)\cap(\varphi\times s)^{-k}(B\times D)) =$$

$$= (\mu\times\nu)(A\times C)(\mu\times\nu)(B\times D) = \mu(A)\mu(B)\nu(C)\nu(D).$$

$$\text{Έχουμε}\ \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu\times\nu)((A\times C)\cap(\varphi\times s)^{-k}(B\times D)) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap\varphi^{-k}(B))\nu(C\cap s^{-k}(D)) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[\mu(A)\mu(B)\nu(C\cap s^{-k}(D)) + (\mu(A\cap\varphi^{-k}(B)) -$$

$$-\mu(A)\mu(B))\nu(C\cap s^{-k}(D))].\ \text{Αφού το } \Phi \text{ είναι ασθενώς } mixing,$$

από $i) \Leftrightarrow ii)$, έχουμε ότι $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\mu(A\cap\varphi^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$

$$\text{Όμως}\ \ \nu(C\cap s^{-k}(D)) \leq 1,\ \text{ άρα }\ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu(A\cap\varphi^{-k}(B)) -$$

$-\mu(A)\mu(B))\nu(C\cap s^{-k}(D))=0$. Λόγω ότι το S είναι εργοδικό,

από Πρόταση 4.3.2. έχουμε $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\nu(C\cap s^{-k}(D))=\nu(C)\nu(D)$.

Άρα έπεται το συμπέρασμα.

viii) $\Rightarrow$ *vi)* Αν $\{1\}$ είναι το ταυτοτικό δυναμικό σύστημα σε ένα σημείο (δηλαδή $\{1\}:=(X=\{x\},\mathcal{A}_0=\{\{x\},\emptyset\},\mu_0=\delta_x,id)$), τότε από υπόθεση $\Phi\times\{1\}$ εργοδικό αφού προφανώς $\{1\}$ εργοδικό. Έστω $A\in\mathcal{A}$ ώστε $\varphi^{-1}(A)= =A$. Τότε $(\varphi\times id)^{-1}(A\times\{x\})=A\times\{x\}$, άρα επειδή $\Phi\times\{1\}$ είναι εργοδικό, $(\mu\times\mu_0)(A\times\{x\})\in\{0,1\}$ δηλαδή $\mu(A)\in\{0,1\}$ (καθώς $\mu_0(\{x\})=1$), άρα το Φ είναι εργοδικό. Από υπόθεση τότε έχουμε $\Phi^2=\Phi\times\Phi$ εργοδικό.

vi) $\Rightarrow$ *iii)* Έστω A, $B\in\mathcal{A}$. Τότε επειδή το Φ^2 είναι εργοδικό,

από Πρόταση 4.3.2. έχουμε $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap\varphi^{-k}(B))^2=$

$$=\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu\times\mu)((A\times A)\cap(\varphi\times\varphi)^{-k}(B\times B))=$$

$$=(\mu\times\mu)(A\times A)(\mu\times\mu)(B\times B)=\mu(A)^2\mu(B)^2.$$

Αν το Φ είναι αντιστρέψιμο δυναμικό σύστημα, προφανώς ισχύουν τα προηγούμενα και ακόμα:

vi) $\Rightarrow$ *ix)* Από Πρόταση 4.3.3. έχουμε ότι το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του εργοδικού τελεστή $T_{\varphi\times\varphi}$. Έστω $T_\varphi f=\lambda f$, $\lambda\neq 0$, τότε από Πρόταση 4.3.4. $|\lambda|=1$. Θα δείξουμε ότι η f είναι σταθερή και θα έχουμε το συμπέρασμα.

Ορίζουμε $g(x,y)=f(x)\overline{f(y)}$ και έχουμε $(T_{\varphi\times\varphi}g)(x,y)=g(\varphi(x),\varphi(y))=$

$$=f(\varphi(x))\overline{f(\varphi(y))}=T_\varphi f(x)\overline{T_\varphi f(y)}=\lambda f(x)\overline{\lambda}\overline{f(y)}=|\lambda|^2 f(x)\overline{f(y)}=g(x,y),$$

άρα g σταθερή, έστω $g(x,y)=c_1\in\mathbb{C}$ για κάθε $x\in X$. Το Φ είναι ασθενώς mixing άρα το Φ είναι εργοδικό, δηλαδή ο T_φ είναι εργοδικός τλεστής. Οπότε το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του και $T_\varphi|f|=|T_\varphi f|=|\lambda||f|=|f|$. Τότε $|f|$ σταθερά, έστω $|f(x)|=c_2\in\mathbb{C}$ για κάθε $x\in X$. Εφόσων $c_1=f(x)\overline{f(y)}$ για κάθε x, $y\in X$, τότε $c_1 f(y)=f(x)\overline{f(y)}f(y)=f(x)c_2$ για κάθε $x,y\in X$. Άρα για $x\in X$ με $f(x)\neq 0$ (υπάρχει τέτοιο αφού f ιδιοσυνάρτηση) έχουμε $c_1=c_2$. Άρα $f(x)=f(y)$ για κάθε x, $y\in X$ δηλαδή f σταθερή.

$ix) \Rightarrow v)$ Έστω V ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$ των ιδιοσυναρτήσεων του T_φ. Θα δείξουμε ότι:

$$\text{αν } f \in V^{\perp} \text{ και } g \in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu) \text{ τότε } \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |< T^k_\varphi f, g >| = 0.$$

Έστω $f \in V^{\perp}$, $g \in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$ και ν το μιγαδικό μέτρο στο $\sigma(T_\varphi)$ του T_φ ορισμένο ώστε $\nu(A) =< E(A)f, g >$ για κάθε A Borel υποσύνολο του $\sigma(T_\varphi)$. Παρατηρούμε ότι αν $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ τότε $T_\varphi E(\{\lambda_0\})f = \int_{\sigma(T_\varphi)} \lambda X_{\lambda_0} dE(\{\lambda_0\})f =$

$$= \lambda_0 \int_{\sigma(T_\varphi)} X_{\lambda_0} dE(\{\lambda_0\})f = \lambda_0 E(\{\lambda_0\})f,$$ δηλαδή $E(\{\lambda_0\})f$ είναι ιδιοσυνάρτηση του T_φ. Όμως $f \in V^{\perp}$ και άρα έχουμε ότι $0 =< E(\{\lambda_0\})f, f >= =< E(\{\lambda_0\})^2 f, f >= \|E(\{\lambda_0\})f\|^2$. Οπότε $E(\{\lambda_0\})f = 0$, δηλαδή για κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ισχύει $\nu(\{\lambda_0\}) = 0$. Ακόμα,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |< T^k_\varphi f, g >|^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\int_{\sigma(T_\varphi)} \lambda^k d < E(\lambda)f, g >|^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\int_{\sigma(T_\varphi)} \lambda^k d\nu(\lambda)\ |^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\int_{\sigma(T_\varphi)} \lambda^k d\nu(\lambda))(\int_{\sigma(T_\varphi)} \overline{\zeta}^k d\overline{\nu}(\zeta)) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sigma(T_\varphi)}\int_{\sigma(T_\varphi)} \lambda^k \overline{\zeta}^k d\nu(\lambda) d\overline{\nu}(\zeta) = \int_{\sigma(T_\varphi)}\int_{\sigma(T_\varphi)} (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \overline{\zeta}^k) d\nu(\lambda) d\overline{\nu}(\zeta)$$

$$= \int_{\sigma(T_\varphi)}\int_{\sigma(T_\varphi)} \frac{1}{n}(\frac{1-(\lambda\overline{\zeta})^n}{1-\lambda\overline{\zeta}}) d\nu(\lambda) d\overline{\nu}(\zeta)$$

(το οποίο ισχύει γιατί $1 - \lambda\overline{\zeta} = 0$ αν και μόνο αν $\lambda = \zeta$ αφού από Πρόταση 4.3.4. αν λ ιδιοτιμή του T_φ τότε $|\lambda| = 1$). Αλλά η διαγώνιος $\Delta = \{(x,x) \in \sigma(T_\varphi) \times \sigma(T_\varphi)\}$ έχει ν-μέτρο μηδέν αφού από θεώρημα Tonnelli:

$$\int_{\sigma(T_\varphi)\times\sigma(T_\varphi)} X_\Delta d(\nu \times \overline{\nu}) = \int_{\sigma(T_\varphi)} (\int_{\sigma(T_\varphi)} X_\Delta(x,y) d\nu(x)) d\overline{\nu}(y) =$$

$$= \int_{\sigma(T_\varphi)} \nu(\{y\}) d\overline{\nu}(y) = 0, \text{ άρα } |\frac{1}{n}(\frac{1-(\lambda\overline{\zeta})^n}{1-\lambda\overline{\zeta}})| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \nu \times \overline{\nu} - \sigma.\pi.$$

Από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |< T^k_\varphi f, g >|^2 = 0.$

Άρα από Πρόταση 5.1.5. για την ακολουθία $\alpha(n) = | < T_\varphi^n f, g > |$ έχουμε

$$* - \lim_n \alpha_n^2 = 0 \text{ ισοδύναμα, } * - \lim_n \alpha_n = 0, \text{ δηλαδή } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = 0,$$

$$\text{άρα ισχύει } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | < T_\varphi^k f, g > | = 0.$$

Έστω $f,\ g \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ τυχαίες. Οι μόνες ιδιοσυναρτήσεις του T_φ είναι οι σταθερές, άρα $f- < f, 1 > \in V^\perp$, και από πριν έχουμε

$$0 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | < T_\varphi^k (f- < f, 1 >), g > | =$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | < T_\varphi^k f, g > - < f, 1 >< 1, g > | \, .$$

$ix) \Rightarrow x)$ Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες έχουμε ότι ο T_φ είναι εργοδικός τελεστής ότι έχει ιδιοσυναρτήσεις μόνο τις σταθερές συναρτήσεις. Επειδή για κάθε $c \in \mathbb{C}$, $T_\varphi(c) = 1 \cdot c$ έχουμε ότι ο T_φ έχει μόνο την 1 ως ιδιοτιμή.

$x) \Rightarrow ix)$ Αν T_φ είναι εργοδικός, τότε από Πρόταση 4.3.3., το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του. Όμως πάλι από υπόθεση, επειδή ο T_φ δεν έχει άλλες ιδιοτιμές, έχουμε ότι ιδιοσυναρτήσεις του είναι μόνο οι σταθερές, δηλαδή ο T_φ έχει συνεχές φάσμα στο συμπλήρωμα του χώρου των σταθερών συναρτήσεων. □

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των ασθενώς mixing δυναμικών συστημάτων η οποία έχει κεντρικό ρόλο σε επόμενο κεφάλαιο. Πρώτα θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 5.2.5. *Για* $a_1, ..., a_k,\ b_1, ..., b_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*$, *ισχύει*

$$\prod_{l=1}^k a_l - \prod_{l=1}^k b_l = \sum_{j=1}^k \left(\prod_{l=1}^{j-1} a_l\right)(a_j - b_j)\left(\prod_{l=j+1}^k b_l\right).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο k.
Για $k = 1$, η προηγούμενη σχέση μας δίνει $a_1 - b_1 = a_1 - b_1$ που ισχύει τετριμμένα, ενώ για $k = 2$ έχουμε $a_1 a_2 - b_1 b_2 = (a_1 - b_1) b_2 + a_1 (a_2 - b_2)$ που ισχύει επίσης. Θα δείξουμε ότι η ισχύς της πρότασης για τυχόν $k \geq 2$

συνεπάγεται την ισχύ της πρότασης για $k+1$ και θα έχουμε το αποτέλεσμα. Από την ισχύ της σχέσης για $k=2$ και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\prod_{l=1}^{k+1} a_l - \prod_{l=1}^{k+1} b_l = (\prod_{l=1}^{k} a_l)a_{k+1} - (\prod_{l=1}^{k} b_l)b_{k+1} = (\prod_{l=1}^{k} a_l - \prod_{l=1}^{k} b_l)b_{k+1}+$$

$$+(a_{k+1}-b_{k+1})\prod_{l=1}^{k} a_l = [\sum_{j=1}^{k}(\prod_{l=1}^{j-1} a_l)(a_j-b_j)(\prod_{l=j+1}^{k} b_l)]b_{k+1}+$$

$$+(a_{k+1}-b_{k+1})\prod_{l=1}^{k} a_l = \sum_{j=1}^{k+1}(\prod_{l=1}^{j-1} a_l)(a_j-b_j)(\prod_{l=j+1}^{k+1} b_l).$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.2.6. *(Furstenberg, Katznelson, Ornstein, 1982 [13]). Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ ένα ασθενώς mixing δυναμικό σύστημα, $m \in \mathbb{N}^*$ και $f_1,...,f_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Τότε*

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m} T_\varphi^{lk} f_l - \prod_{l=1}^{m}\int f_l d\mu\|_2 = 0.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο m.
Για $m=1$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1\|_2 = 0 \ \text{ αν } \int f_1 d\mu = 0.$$

Πράγματι, το $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ είναι ένα ασθενώς mixing δυναμικό σύστημα, οπότε και εργοδικό άρα ο T_φ είναι εργοδικός τελεστής και από Πρόταση 4.3.2. έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1 = \int f_1 d\mu = 0 \ \ \mu-\sigma.\pi.$$

.

$$\text{Εφόσον } \int |f_1|^2 d\mu \le \|f_1\|_\infty^2 < \infty, \ \text{ καθώς } f_1 \in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu),$$

$$\text{έχουμε } f_1 \in L^2_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu) \subseteq L^1_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu) \text{ και από Θεώρημα Yosida έχουμε}$$

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1\|_2 = 0, \ \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Στην γενική περίπτωση, για $f_1 \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, θέτοντας

$$g = f_1 - \int f_1 d\mu \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ ισχύει } \int g d\mu = 0. \text{ Άρα}$$

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n T_\varphi^k g\|_2 = 0. \text{ Επειδή } T_\varphi^k g = T_\varphi^k f_1 - \int f_1 d\mu, \quad k = 1, ..., n$$

$$\text{έχουμε } \lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n T_\varphi^k f_1 - \int f_1 d\mu\|_2 = 0. \text{ Άρα ισχύει το ζητούμενο.}$$

Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για $m \in \mathbb{N}^*$, θα δείξουμε την ισχύ του για $m+1$.

Αρχικά, για $f_1, ..., f_{m+1} \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ τέτοιες ώστε να υπάρχει $1 \leq i_0 \leq k+1$ ώστε $\int f_{i_0} d\mu = 0$, θα δείξουμε ότι

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l\|_2 = 0 \qquad (*).$$

Έστω $x_k = \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αρκεί, από Πόρισμα 5.1.9.,

$$\text{να δείξουμε ότι } * - \lim_h (\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n < x_k, x_{k+h} >) = 0.$$

$$\text{Ισχύει ότι } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n < x_k, x_{k+h} > = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l \overline{\prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{l(k+h)} f_l} d\mu =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int T_\varphi^k (\prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} f_l \overline{\prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k+lh} f_l}) d\mu =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} (f_l \overline{T_\varphi^{lh} f_l}) d\mu =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int f_1 T_\varphi^h(\overline{f_1}) \prod_{l=2}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} (f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})) d\mu,$$

από τις ιδιότητες του T_φ. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=2}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k}(f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})) - \prod_{l=2}^{m+1}\int f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})d\mu\|_2 = 0.$$

Επειδή η norm σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση σ' ένα χώρο Banach, για την συνάρτηση $f_1 T_\varphi^h(\overline{f_1})$ έχουμε ότι

$$\lim_n < f_1 T_\varphi^h(\overline{f_1}), \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\prod_{l=2}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k}(f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l}))} >=$$

$$=< f_1 T_\varphi^h(\overline{f_1}), \overline{\prod_{l=2}^{m+1}\int f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})d\mu} >= \int (f_1 T_\varphi^h(\overline{f_1})\prod_{l=2}^{m+1}\int f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})d\mu)d\mu =$$

$$= \prod_{l=1}^{m+1}\int f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})d\mu. \text{ Δηλαδή } \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_k, x_{k+h} >= \prod_{l=1}^{m+1}\int f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})d\mu.$$

Το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι ένα ασθενώς mixing δυναμικό σύστημα, άρα, από Θεώρημα 5.2.4., για $l = 1, ..., m+1$ και $k = 0, 1, ..., l-1$ έχουμε:

$$* - \lim_h \int T_\varphi^{lh}(f_l)\overline{f_l}d\mu = * - \lim_h \int T_\varphi^k[T_\varphi^{lh}(f_l)\overline{f_l}]d\mu =$$

$$= * - \lim_h \int T_\varphi^{lh+k}(f_l)\overline{T_\varphi^k f_l}d\mu = (\int f_l d\mu)(\overline{\int T_\varphi^k f_l d\mu}) = (\int f_l d\mu)(\overline{\int f_l d\mu}) =$$

$$= |\int f_l d\mu|^2. \text{ Άρα } * - \lim_h \int T_\varphi^{lh}(f_l)\overline{f_l}d\mu = |\int f_l d\mu|^2 \text{ για } l = 1, ..., m+1.$$

$$\text{Επομένος } \quad * - \lim_h(\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < x_k, x_{k+h} >) = * - \lim_h \prod_{l=1}^{m+1}\int f_l T_\varphi^{lh}(\overline{f_l})d\mu =$$

$$= * - \lim_h \prod_{l=1}^{m+1}\overline{\int T_\varphi^{lh}(f_l)\overline{f_l}d\mu} = \prod_{l=1}^{m+1}|\int f_l d\mu|^2 = 0, \text{ καθώς } \int f_{l_0}d\mu = 0.$$

Για την γενική περίπτωση, έστω $f_1, ..., f_{m+1} \in L_{\mathbb{C}}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Παρατηρούμε ότι $T_\varphi^{lk}\int f_l d\mu = \int f_l d\mu$, για κάθε $l = 1, ..., m+1$. Από Πρόταση 5.2.5., έχουμε

$$\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m+1}T_{\varphi}^{lk}f_l-\prod_{l=1}^{m+1}\int f_l d\mu\|_2=\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\prod_{l=1}^{m+1}T_{\varphi}^{lk}f_l-\prod_{l=1}^{m+1}\int f_l d\mu)\|_2=$$

$$=\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m+1}(\prod_{l=1}^{j-1}T_{\varphi}^{lk}f_l)(T_{\varphi}^{jk}f_j-\int f_j d\mu)(\prod_{l=j+1}^{m+1}\int f_l d\mu)]\|_2=$$

$$=\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m+1}(\prod_{l=1}^{j-1}T_{\varphi}^{lk}f_l)T_{\varphi}^{jk}(f_j-\int f_j d\mu)(\prod_{l=j+1}^{m+1}T_{\varphi}^{lk}\int f_l d\mu)]\|_2=$$

$$=\|\sum_{j=1}^{m+1}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\prod_{l=1}^{j-1}T_{\varphi}^{lk}f_l)T_{\varphi}^{jk}(f_j-\int f_j d\mu)(\prod_{l=j+1}^{m+1}T_{\varphi}^{lk}\int f_l d\mu)]\|_2\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m+1}\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\prod_{l=1}^{j-1}T_{\varphi}^{lk}f_l)T_{\varphi}^{jk}(f_j-\int f_j d\mu)(\prod_{l=j+1}^{m+1}T_{\varphi}^{lk}\int f_l d\mu)\|_2\to 0$$

από τριγωνική ανισότητα καθώς $n\to\infty$ λόγω του ότι για κάθε $j=1,...,m+1$ ισχύει η σχέση $(*)$ για τις συναρτήσεις $f_1,...,f_{j-1},f_j-\int f_j d\mu,\int f_{j+1}d\mu,...,$ $\int f_{m+1}d\mu$ (όπου για $j=1$ έχουμε $f_1-\int f_1 d\mu,\int f_2 d\mu,...,\int f_{m+1}d\mu$ και για $j=m+1$ έχουμε $f_1,...,f_m,f_{m+1}-\int f_{m+1}d\mu$). Άρα αποδείχθηκε το θεώρημα. $\square$

Παρακάτω αποδεικνύουμε κάποιους περεταίρω χαρακτηρισμούς για ένα ασθενώς mixing δυναμικό σύστημα Φ.

Πρόταση 5.2.7. *Για ένα Φ=$(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ δυναμικό σύστημα, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) Το Φ είναι ασθενώς mixing.
ii) Για κάθε $f_0,f_1,...,f_m\in L_{\mathbb{C}}^{\infty}(X,\mathcal{A},\mu),\ m\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$*-\lim_n\int\prod_{l=0}^{m}T_{\varphi}^{ln}f_l=\prod_{l=0}^{m}\int f_l d\mu.$$

iii) Για κάθε $A_0,A_1,...,A_m\in\mathcal{A},\ m\in\mathbb{N}^*$ και για κάθε $\lambda\in\mathbb{N}^*$, ισχύει

$$*-\lim_n|\mu(\bigcap_{l=0}^{m}\varphi^{-ln}(A_l))-\prod_{l=0}^{m}\mu(A_l)|^{\lambda}=0.$$

Απόδειξη. $i) \Rightarrow ii)$ Για τις συναρτήσεις $\overline{f_1}, ..., \overline{f_m} \in L^\infty_\mathbb{C}(X, \mathcal{A}, \mu)$ από Θεώρημα 5.2.6. (επειδή η norm σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή) για την $f_0 \in L^\infty_\mathbb{C}(X, \mathcal{A}, \mu)$ (άρα και $f_0 \in L^2_\mathbb{C}(X, \mathcal{A}, \mu)$ αφού $\|f_0\|_2 \leq \|f_0\|_\infty$) έχουμε

$$\lim_n < f_0, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \overline{\prod_{l=1}^m T_\varphi^{lk} f_l} >=< f_0, \overline{\prod_{l=1}^m \int f_l d\mu} >,$$

$$\text{δηλαδή,} \quad \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int f_0 \prod_{l=1}^m T_\varphi^{lk} f_l d\mu = \prod_{l=0}^m \int f_l d\mu \qquad (*).$$

Το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι ένα ασθενώς mixing σύστημα άρα, από Θεώρημα 5.2.4., έχουμε ότι το $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu, \varphi \times \varphi)$ είναι ένα ασθενώς mixing σύστημα και τότε, από Θεώρημα 5.2.6., για τις συναρτήσεις $f_1 \times f_1, ..., f_m \times f_m \in L^\infty_\mathbb{C}(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu, \varphi \times \varphi)$ (όπου $(f_i \times f_i)(x, y) = f_i(x) f_i(y)$), για την $f_0 \times f_0$ θα έχουμε (επειδή $\int f \times f d(\mu \times \mu) = (\int f d\mu)^2$)

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (\int f_0 \prod_{l=1}^m T_\varphi^{lk} f_l d\mu)^2 = \prod_{l=0}^m (\int f_l d\mu)^2 \qquad (**).$$

Από τις $(*), (**)$ και την Πρόταση 5.1.5. έχουμε ότι:

$$* - \lim_n \int f_0 \prod_{l=1}^m T_\varphi^{ln} f_l = \prod_{l=0}^m \int f_l d\mu, \quad \text{δηλαδή το ζητούμενο.}$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Έστω $A_0, A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Θέτουμε $f_i = X_{A_i}$, για κάθε $i = 0, 1, ..., m$. Τότε $f_i \in L^\infty_\mathbb{C}(X, \mathcal{A}, \mu)$, για κάθε $i = 0, 1, ..., m$. Από υπόθεση

$$* - \lim_n \int \prod_{l=0}^m T_\varphi^{ln} X_{A_l} d\mu = \prod_{l=0}^m \int X_{A_l} d\mu,$$

$$\text{δηλαδή,} \quad * - \lim_n \mu(\bigcap_{l=0}^m \varphi^{-ln}(A_l)) = \prod_{l=0}^m \mu(A_l),$$

$$\text{και ισοδύναμα,} \quad * - \lim_n |\mu(\bigcap_{l=0}^m \varphi^{-ln}(A_l)) - \prod_{l=0}^m \mu(A_l)| = 0, \quad \text{αφού}$$

$$T_\varphi^{ln} X_{A_l} = X_{A_l} \circ \varphi^{ln} = X_{\varphi^{-ln}(A_l)}, \quad \text{για } l = 0, 1, ..., m \text{ και } X_A X_B = X_{A \cap B}$$

για κάθε $A,\ B \in \mathcal{A}$. Από Πρόταση 5.1.5. έχουμε για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}^*$ ότι

$$* - \lim_n |\mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-ln}(A_l)) - \prod_{l=0}^{m} \mu(A_l)|^{\lambda} = 0$$ που είναι το ζητούμενο.

$iii) \Rightarrow i)$ Έστω $A,\ B \in \mathcal{A}$. Από την $iii)$ και την Πρόταση 5.1.5. έχουμε ότι

$$* - \lim_n \mu(A \cap \varphi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B),$$ δηλαδή το Φ είναι ασθενώς mixing.

□

Πόρισμα 5.2.8. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ασθενώς mixing και $A, A_0, A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Τότε*

$i)$ $$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A_l)) = \prod_{l=0}^{m} \mu(A_l),$$ *και*

$ii)$ $$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) = \mu(A)^{m+1}.$$

Απόδειξη. $i)$ Στην κατεύθυνση $ii) \Rightarrow iii)$ της προηγούμενης πρότασης δείξαμε ότι για $A_0, A_1, ..., A_m,\ m \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$* - \lim_n \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-ln}(A_l)) = \prod_{l=0}^{m} \mu(A_l).$$ Άρα από την Πρόταση 5.1.5.

έχουμε $$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A_l)) = \prod_{l=0}^{m} \mu(A_l).$$

$ii)$ Έπεται από την $i)$ θέτοντας $A_i = A \in \mathcal{A},\ i = 0, 1, ..., m.$ □

Κεφάλαιο 6

Συμπαγή Δυναμικά Συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται και χαρακτηρίζονται τα συμπαγή δυναμικά συστήματα. Τα συστήματα αυτά ορίζονται μέσω της έννοιας της σχεδόν περιοδικής μετρήσιμης συνάρτησης, η οποία μελετάται στην παράγραφο 6.1. Η έννοια του συμπαγούς δυναμικού συστήματος είναι συμπληρωματική της έννοιας του ασθενώς mixing δυναμικού συστήματος. Η συμπληρωματικότητα των δύο εννοιών αναδεικνύεται από το Θεώρημα 6.2.6., όπου τα ασθενώς mixing συστήματα χαρακτηρίζονται από την μη ύπαρξη μη τετριμμένων σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων, ενώ τα συμπαγή συστήματα εξ' ορισμού είναι τα συστήματα όπου όλες οι συναρτήσεις είναι σχεδόν περιοδικές. Ακόμα, στο Θεώρημα 6.2.6. αποδεικνύεται η ακόλουθη διχοτομία: αν ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δεν είναι ασθενώς mixing, τότε υπάρχει μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ώστε το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ να είναι συμπαγές.

6.1 Σχεδόν Περιοδικές Συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή ορίζονται και μελετώνται οι σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις ενός δυναμικού συστήματος.

Ορισμός 6.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα και $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Η f καλείται* **σχεδόν περιοδική** *αν το σύνολο $\{T^n_\varphi f \mid n \in \mathbb{N}\}$, που λέγεται* **τροχιά** *της f μέσω του T_φ, είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ (δηλαδή το σύνολο $\overline{\{T^n_\varphi f \mid n \in \mathbb{N}\}}^{L^2}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$).*

Πρόταση 6.1.2. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένα δυναμικό σύστημα. Το σύνολο $\mathcal{H} = \{h \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu) \mid h$ σχεδόν περιοδική$\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$.*

Απόδειξη. Αν $f_1,\ f_2 \in \mathcal{H}$, τότε $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{H}$ για κάθε $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Πράγματι, θέτουμε $A = \{T^n_\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Θα αποδειχθεί ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Έστω $B = \{T^n_\varphi f_1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $C = \{T^n_\varphi f_2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Τότε $\overline{B},\ \overline{C}$ είναι συμπαγή σύνολα, άρα τα $B,\ C$ είναι ολικά φραγμένα. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχουν $k, l \in \mathbb{N}^*$ και $b_i,\ c_j \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ για $1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq k$ ώστε

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D(b_i, \frac{\varepsilon}{2(|\lambda_1|+1)}),\ \text{ και }\ C \subseteq \bigcup_{j=i}^{k} D(c_j, \frac{\varepsilon}{2(|\lambda_2|+1)}).$$

Για $\alpha \in A$ έχουμε ότι $\alpha = \lambda_1 b + \lambda_2 c$, όπου $b \in B,\ c \in C$. Τότε υπάρχουν $b_{i_0} \in B$, και $c_{j_0} \in C$ ώστε

$$\|b - b_{i_0}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda_1|+1)},\ \text{ και }\ \|c - c_{j_0}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda_2|+1)}.$$

Άρα $\|\alpha - \lambda_1 b_{i_0} - \lambda_2 c_{j_0}\|_2 \leq |\lambda_1|\|b - b_{i_0}\|_2 + |\lambda_2|\|c - c_{j_0}\|_2 < \varepsilon$, οπότε

$A \subseteq \bigcup\limits_{1\leq i\leq l,\, 1\leq j\leq k} D(\lambda_1 b_i + \lambda_2 c_j, \varepsilon)$. Επομένος το A είναι ολικά φραγμένο, άρα το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Επομένος ο $\mathcal{H}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$.

Ο $\mathcal{H}$ είναι κλειστός. Πράγματι, αν $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του $\mathcal{H}$ και $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ ώστε $\|f_n - f\|_2 \to 0$, καθώς $n \to \infty$, τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_m - f\|_2 < \varepsilon/2$. Αν $A = \{T^n_\varphi f \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{T^n_\varphi f_m \mid n \in \mathbb{N}\}$, τότε θα υπάρχουν

$$l \in \mathbb{N}^* \text{ και } b_i \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu) \text{ για } 1 \leq i \leq l \text{ με } B \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D(b_i, \frac{\varepsilon}{2})$$

(αφού η f_m είναι σχεδόν περιοδική). Επομένος για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $1 \leq i_n \leq l$ ώστε

$$\|T^n_\varphi f_m - b_{i_n}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.\ \text{Άρα}\ \|T^n_\varphi f - b_{i_n}\|_2 \leq \|T^n_\varphi f - T^n_\varphi f_m\|_2 +$$

$$+ \|T^n_\varphi f_m - b_{i_n}\|_2 = \|f - f_m\|_2 + \|T^n_\varphi f_m - b_{i_n}\|_2 < \varepsilon.$$

Τότε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D(b_i, \varepsilon)$, δηλαδή το A είναι ολικά φραγμένο, άρα το $\overline{A}$ είναι συμπαγές, οπότε η f είναι σχεδόν περιοδική, δηλαδή $f \in \mathcal{H}$. Επομένος ο $\mathcal{H}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. □

Πρόταση 6.1.3. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ένα δυναμικό σύστημα. Αν* $h_1,\ h_2 \in \mathcal{H} = \{h \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid\ h\ \ \text{σχεδόν περιοδική}\}$, *τότε και οι συναρτήσεις* $h_1 \vee h_2 = \max(h_1,\ h_2)$ *και* $h_1 \wedge h_2 = \min(h_1,\ h_2)$ *είναι σχεδόν περιοδικές.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{T^n_\varphi h_1 \mid\ n \in \mathbb{N}\}$ και $C = \{T^n_\varphi h_2 \mid\ n \in \mathbb{N}\}$. Τότε τα $B,\ C$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και άρα για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k,\ l \in \mathbb{N}^*$ και $b_i,\ c_j \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ για κάθε $1 \le i \le k,\ 1 \le j \le l$ ώστε

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} D(b_i, \frac{\varepsilon}{2}), \text{ και } C \subseteq \bigcup_{j=i}^{l} D(c_j, \frac{\varepsilon}{2}). \text{ Έστω } A = \{T^n_\varphi(h_1 \wedge h_2) \mid\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν $i \equiv i_n,\ j \equiv j_n,\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le l$ ώστε $\|T^n_\varphi h_1 - b_i\|_2 < \varepsilon/2$ και $\|T^n_\varphi h_2 - c_j\|_2 < \varepsilon/2$. Από τις ιδιότητες του T_φ, έχουμε ότι $T^n_\varphi(h_1 \wedge h_2) = \frac{1}{2}(T^n_\varphi h_1 + T^n_\varphi h_2) - \frac{1}{2}|T^n_\varphi h_1 - T^n_\varphi h_2|,\ n \in \mathbb{N}$ (αφού για τυχαίους $\alpha,\ \beta$ πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\min\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$).

$$\text{Άρα}\quad \|T^n_\varphi(h_1 \wedge h_2) - b_i \wedge c_j\|_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\|T^n_\varphi h_1 + T^n_\varphi h_2 - |T^n_\varphi h_1 - T^n_\varphi h_2| - b_i - c_j + |b_i - c_j|\|_2 \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\|T^n_\varphi h_1 - b_i\|_2 + \|T^n_\varphi h_2 - c_j\|_2 + \||T^n_\varphi h_1 - T^n_\varphi h_2| - |b_i - c_j|\|_2).$$

$$\text{Εφόσον}\ \ |T^n_\varphi h_1 - T^n_\varphi h_2| - |b_i - c_j| \le |T^n_\varphi h_1 - T^n_\varphi h_2 - b_i + c_j| \le$$

$$\le |T^n_\varphi h_1 - b_i| + |T^n_\varphi h_2 - c_j|,$$

$$\text{έχουμε ότι}\ \ \||T^n_\varphi h_1 - T^n_\varphi h_2| - |b_i - c_j|\|^2_{2\le}$$

$$\le \int (|T^n_\varphi h_1 - b_i| + |T^n_\varphi h_2 - c_j|)^2 d\mu = \|T^n_\varphi h_1 - b_i\|^2_2 + \|T^n_\varphi h_2 - c_j\|^2_2 +$$

$$+2\int |T^n_\varphi h_1 - b_i||T^n_\varphi h_2 - c_j| d\mu < \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\|T^n_\varphi h_1 - b_i\|_2\|T^n_\varphi h_2 - c_j\|_2 < \varepsilon^2$$

(όπου στο τέλος χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz). Από τα προηγούμενα έχουμε

$$\|T^n_\varphi(h_1 \wedge h_2) - b_i \wedge c_j\|_2 < \varepsilon, \text{ δηλαδή το } A \subseteq \bigcup_{1 \le i \le k,\ 1 \le j \le l} D(b_i \wedge c_j, \varepsilon)$$

είναι ολικά φραγμένο, οπότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Άρα $h_1 \wedge h_2 \in \mathcal{H}$ και επειδή $h_1 \vee h_2 = -(-h_1) \wedge (-h_2)$ έχουμε το συμπέρασμα. □

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένα δυναμικό σύστημα. Το σύνολο $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} \mid X_A$ είναι σχεδόν περιοδική$\}$ είναι σ-άλγεβρα.*

Απόδειξη. $\emptyset \in \mathcal{F}$ καθώς η συνάρτηση 0 είναι σχεδόν περιοδική.

Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A^c \in \mathcal{F}$, διότι $X_{A^c} = 1 - X_A$, οι 1, X_A είναι σχεδόν περιοδικές και ο $\mathcal{H} = \{h \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid h$ σχεδόν περιοδική$\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Θα αποδείξουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Έστω $A,\ B \in \mathcal{F}$. Τότε οι X_A και X_B είναι σχεδόν περιοδικές. Έχουμε $X_{A\cap B} = X_A X_B = X_A \wedge X_B$, άρα $A \cap B \in \mathcal{F}$ επειδή ο $\mathcal{H}$ είναι κλειστός ως προς $\vee$, $\wedge$. Δηλαδή η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες τομές, άρα και κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις. Έχουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Πράγματι,

$$\text{για } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } m \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Έχουμε ότι $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{F}$, άρα η $X_{\bigcup_{n=1}^{m} A_n}$ είναι σχεδόν περιοδική και

$$X_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = X_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n} + X_{\bigcup_{n=1}^{m} A_n}.$$

$$\text{Τότε, } T_\varphi^k X_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = T_\varphi^k X_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n} + T_\varphi^k X_{\bigcup_{n=1}^{m} A_n} =$$
$$= X_{\varphi^{-k}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n)} + T_\varphi^k X_{\bigcup_{n=1}^{m} A_n}.$$

Εφόσον η $X_{\bigcup_{n=1}^{m} A_n}$ είναι σχεδόν περιοδική, έχουμε ότι υπάρχουν

$$l \in \mathbb{N}^* \text{ και } k_i \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu), \text{ για } 1 \le i \le l \text{ ώστε}$$

$$\{T_\varphi^k X_{\bigcup_{n=1}^{m} A_n} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D(k_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Ακόμα, $\displaystyle \| X_{\varphi^{-k}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n)} \|_2 = \Big(\int X^2_{\varphi^{-k}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n)} d\mu\Big)^{1/2} =$

$$= (\int X_{\varphi^{-k}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n)} d\mu)^{1/2} = \mu(\varphi^{-k}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n))^{1/2} =$$

$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα από τα προηγούμενα έχουμε ότι το

$\{T_\varphi^k X_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D(k_i, \varepsilon)$ είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Άρα η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. □

Πρόταση 6.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένα δυναμικό σύστημα και $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Αν $\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, η ελάχιστη σ-άλγεβρα στην οποία η f είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}_f$ η X_A είναι σχεδόν περιοδική.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για το τυχόν $B = f^{-1}((-\infty, \beta])$, $\beta \in \mathbb{R}$, διότι η $\mathcal{A}_f$ παράγεται από αυτά τα σύνολα. Έχουμε $B \in \mathcal{A}_f$. Αν $A_n = \{x \in X \mid T_\varphi^n f(x) \leq \beta\}$, τότε

$$T_\varphi^n X_B = T_\varphi^n X_{f^{-1}((-\infty,\beta])} = X_{(T_\varphi^n f)^{-1}((-\infty,\beta])} = X_{\{x\in X \mid T_\varphi^n f(x) \leq \beta\}} = X_{A_n}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\{X_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ για να δείξουμε ότι η X_B είναι σχεδόν περιοδική. Αλλά το $\{T_\varphi^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, αφού η f είναι σχεδόν περιοδική, άρα υπάρχει $(T_\varphi^{k_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(T_\varphi^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ και $t \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε

$\lim_n \| T_\varphi^{k_n} f - t \|_2 = 0$. Τότε $\lim_n T_\varphi^{k_n} f = t$ κατά μέτρο (Πρόταση 2.3.71.)

άρα (Πρόταση 2.3.56.) θα υπάρχει $(T_\varphi^{l_{k_n}} f)_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(T_\varphi^{k_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$\lim_n T_\varphi^{l_{k_n}} f = t$ $\mu - \sigma.\pi.$ Άρα, από Θεώρημα Egoroff, για $\varepsilon > 0$ $(\mu(X) < \infty)$

υπάρχει $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) < \varepsilon$ τέτοιο ώστε η $(T_\varphi^{l_{k_n}} f)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $X \setminus E$. Αν $A = \{x \in X \mid t(x) \leq \beta\}$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\| X_{A_{l_{k_n}}} - X_A \|_2 = \mu(A_{l_{k_n}} \triangle A) = \mu((A_{l_{k_n}} \cap A^c) \cup (A^c_{l_{k_n}} \cap A)) \leq \mu(E) < \varepsilon,$$

αφού για $x \in X \setminus E$ δεν μπορεί να ισχύουν οι σχέσεις $T_{\varphi}^{l_{k_n}} f(x) \leq \beta$ και $t(x) > \beta$ ή $T_{\varphi}^{l_{k_n}} f(x) > \beta$ και $t(x) \leq \beta$.

Άρα $\lim\limits_{n} \| X_{A_{l_{k_n}}} - X_A \|_2 = 0$. Επομένως το σύνολο $\overline{\{T_{\varphi}^{n} X_B \mid n \in \mathbb{N}\}}^{L^2}$

είναι ακολουθιακά συμπαγές, άρα συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι η X_B είναι σχεδόν περιοδική. □

Πόρισμα 6.1.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένα δυναμικό σύστημα και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ακολουθία σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων. Αν $\mathcal{A}_1$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα ώστε οι συναρτήσεις f_n να είναι μετρήσιμες για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε κάθε $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ είναι σχεδόν περιοδική.*

Απόδειξη. Η $\mathcal{A}_1$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{f_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Από Πρόταση 6.1.4. η $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} \mid X_A$ είναι σχεδόν περιοδική$\}$ είναι σ-άλγεβρα και από Πρόταση 6.1.5. έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{f_n} \subseteq \mathcal{F}, \text{ άρα } \mathcal{A}_1 = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{f_n}) \subseteq \mathcal{F},$$

από όπου έπεται ότι X_A είναι σχεδόν περιοδική για κάθε $A \in \mathcal{A}_1$. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathcal{H}_1 = \{h \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu) \mid h$ σχεδόν περιοδική$\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ (απόδειξη όπως στην Πρόταση 6.1.2.), άρα κάθε απλή συνάρτηση του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ είναι σχεδόν περιοδική. Η τυχαία $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ είναι σχεδόν περιοδική αφού προσεγγίζεται από απλές συναρτήσεις (εργαζόμαστε όπως στην Πρόταση 6.1.4.). □

6.2 Συμπαγή Δυναμικά Συστήματα

Ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της εργοδικής θεωρίας, το οποίο θα έχει κεντρικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος του Furstenberg (Θεώρημα IV) είναι το Θεώρημα 6.2.6. όπου αποδεικνύεται ότι η έννοια του συμπαγούς δυναμικού συστήματος είναι συμπληρωματική της έννοιας του ασθενούς mixing δυναμικού συστήματος: αν ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δεν είναι ασθενώς mixing, τότε υπάρχει μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ώστε το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ να είναι συμπαγές.

Ορισμός 6.2.1. *Ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ θα λέγεται* **συμπαγές** *αν κάθε $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σχεδόν περιοδική.*

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ένα συμπαγές δυναμικό σύστημα. Τότε, για κάθε $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $f \geq 0$ αλλά όχι $f = 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ ισχύει*

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \prod_{l=0}^m T^{lk}_\varphi f d\mu > 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geq 0$ και $f \neq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ Για $m = 0$ το συμπέρασμα είναι άμεσο (αφού $f \neq 0$ $\mu{-}\sigma.\pi.$), οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \in \mathbb{N}^*$. Ακόμα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq f \leq 1$ $\mu - \sigma.\pi.$ (αλλιώς, θεωρούμε την συνάρτηση $f/\|f\|_\infty$ η οποία ορίζεται καλά διότι $\|f\|_\infty \neq 0$ και έχουμε το συμπέρασμα από γραμμικότητα του T_φ). Θέτουμε $\alpha = \int f^{m+1} d\mu$. Επειδή $f \neq 0$ $\mu - \sigma.\pi.$, έχουμε $\alpha > 0$ και

$$\alpha = \int f^{m+1} d\mu \leq |\int f^{m+1} d\mu| \leq \int |f^{m+1}| d\mu \leq \int \|f\|^{m+1}_\infty d\mu = \|f\|^{m+1}_\infty,$$

το οποίο δεν απειρίζεται καθώς $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, δηλαδή $0 < \alpha < \infty$.

Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{m} \int f^{m+1} d\mu$. Καθώς $|f|^2 \leq \|f\|^2_\infty$ $\mu - \sigma.\pi.$, έχουμε

$$\|f\|^2_2 = \int |f|^2 d\mu \leq \int \|f\|^2_\infty d\mu = \|f\|^2_\infty < \infty, \text{ δηλαδή } f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Άρα αφού το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι ένα συμπαγές δυναμικό σύστημα, η f είναι σχεδόν περιοδική. Εφ' όσον $\overline{\{T^n_\varphi f \mid n \in \mathbb{N}\}}$ είναι συμπαγές, για το $\varepsilon/m > 0$ μπορούμε να βρούμε σύνολο $\{T^{k_1}_\varphi f, ..., T^{k_r}_\varphi f\}$ με $\|T^{k_i}_\varphi f - T^{k_j}_\varphi f\|_2 \geq \varepsilon/m$ για κάθε $1 \leq i \neq j \leq r$ όπου r μέγιστο (Πρόταση 2.2.23.). Όμως επειδή ο $T_\varphi : L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ισομετρία, έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{T^{k+k_1}_\varphi f, ..., T^{k+k_r}_\varphi f\}$ έχει πληθικότητα r και τα στοιχεία του ικανοποιούν τη σχέση $\|T^{k+k_i}_\varphi f - T^{k+k_j}_\varphi f\|_2 = \|T^{k_i}_\varphi f - T^{k_j}_\varphi f\|_2 \geq \varepsilon/m$ για κάθε $1 \leq i \neq j \leq r$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $1 \leq i \leq r$ ώστε $\|T^{k+k_i}_\varphi f - f\|_2 < \varepsilon/m$. Θεωρούμε $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \ \|T^n_\varphi f - f\|_2 < \varepsilon/m\}$. Γράφοντας για το τυχόν $n \in \mathbb{N}^*$, $n = p_n r + l_n$, $0 \leq l_n < r$, $p_n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\underline{d}(E) = \liminf_n \frac{| E \cap \{0, 1, ..., n-1\} |}{n} \geq \liminf_n \frac{| E \cap \{0, 1, ..., p_n r - 1\} |}{p_n r + l_n} \geq$$

$$\geq \liminf_n \frac{| E \cap \{0, 1, ..., p_n r - 1\} |}{(p_n + 1) r} \geq \frac{1}{r} \liminf_n \frac{p_n}{p_n + 1} = \frac{1}{r} > 0$$

αφού σε κάθε r διαδοχικούς όρους του $\mathbb{N}$ ένας τουλάχιστον όρος ανήκει στο E. Για $k \in E$ έχουμε $\|T_\varphi^{(j+1)k} f - T_\varphi^{jk} f\|_2 = \|T_\varphi^k f - f\|_2 < \varepsilon/m,\ j \in \mathbb{N}$, άρα από τριγωνική ανισότητα θα έχουμε για κάθε $l = 1, ..., m$

$$\|T_\varphi^{lk} f - f\|_2 \leq \sum_{j=0}^{l-1} \|T_\varphi^{(j+1)k} f - T_\varphi^{jk} f\|_2 < l\frac{\varepsilon}{m} \leq \varepsilon.$$

Εφ′ όσον $0 \leq f \leq 1\ \ \mu - \sigma.\pi.$, έχουμε ότι $0 \leq T_\varphi^{lk} f \leq 1\ \ \mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $l = 1, ..., m,\ k \in \mathbb{N}$. Από Λήμμα 5.2.5. έχουμε

$$\prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f - f^{m+1} = f(\prod_{l=1}^{m} T_\varphi^{lk} f - f^m) = f[\sum_{j=1}^{m}(\prod_{l=1}^{j-1} T_\varphi^{lk} f)(T_\varphi^{jk} f - f)(f^{m-j})].$$

$$\text{Άρα}\ \ |\int \prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f d\mu - \int f^{m+1} d\mu| = |\int (\prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f - f^{m+1}) d\mu| \leq$$

$$\leq \int f |\prod_{l=1}^{m} T_\varphi^{lk} f - f^m| d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} \int \prod_{l=1}^{j-1} T_\varphi^{lk} f |T_\varphi^{jk} f - f| f^{m-j} d\mu \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \int |T_\varphi^{jk} f - f| d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} (\int |\ T_\varphi^{jk} f - f\ |^2\ d\mu)^{1/2} (\int 1^2 d\mu)^{1/2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \|T_\varphi^{jk} f - f\|_2 < m\varepsilon.\ \ \text{Επομένως}\ \ \int \prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f d\mu \geq \int f^{m+1} d\mu -$$

$$-|\int \prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f d\mu - \int f^{m+1} d\mu| > \alpha - m\varepsilon =: \alpha' > 0.$$

$$\text{Άρα}\ \ \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f d\mu \geq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\int \prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} f d\mu) X_E \geq$$

$$\geq \liminf_n \frac{1}{n} \alpha' |E_n| = \alpha' \liminf_n \frac{1}{n} |E \cap \{1, ..., n\}| = \alpha' \underline{d}(E) > 0.$$

□

Πόρισμα 6.2.3. *Αν $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ συμπαγές δυναμικό σύστημα, τότε για κάθε*

$$A \in \mathcal{A} \quad \text{με} \quad \mu(A) > 0 \quad \text{και} \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{ισχύει} \quad \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)\Big) > 0.$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Από το προηγούμενο θεώρημα για

$$f = \mathcal{X}_A \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \ \text{ έχουμε ότι } \ \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \prod_{l=0}^{m} T_\varphi^{lk} \mathcal{X}_A d\mu > 0,$$

$$\text{δηλαδή } \ 0 < \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \prod_{l=0}^{m} \mathcal{X}_{\varphi^{-lk}(A)} d\mu = \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)\Big).$$

□

Πρόταση 6.2.4. *Έστω ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ώστε ο τελεστής $T_\varphi \times T_\varphi$ δεν είναι εργοδικός. Τότε υπάρχει $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ που δεν είναι $\mu - \sigma.\pi.$ σταθερή η οποία είναι σχεδόν περιοδική.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T_φ είναι εργοδικός τελεστής, γιατί αλλιώς θα υπάρχει $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $T_\varphi f = f$ η οποία δεν είναι $\mu - \sigma.\pi.$ σταθερή, από ορισμό του εργοδικού τελεστή. Τότε έχουμε ότι $\overline{\{T_\varphi^n \mid n \in \mathbb{N}\}}^{L^2} = \{f\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και έχουμε το συμπέρασμα.

Έστω ότι T_φ εργοδικός τελεστής και ότι ο $T_\varphi \times T_\varphi$ δεν είναι εργοδικός. Άρα θα υπάρχει $H \in L^2_{\mathbb{R}}(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu)$ ώστε $(T_\varphi \times T_\varphi)(H) = H$ η οποία δεν είναι $\mu \times \mu - \sigma.\pi.$ σταθερή. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(y) = \int H(x, y) d\mu(x)$. Από τις ιδιότητες του T_φ, έχουμε ότι

$$T_\varphi g(y) = g(\varphi(y)) = \int H(x, \varphi(y)) d\mu(x) = \int T_\varphi(H(x, \varphi(y))) d\mu(x) =$$

$$= \int H(\varphi(x), \varphi(y)) d\mu(x) = \int (T_\varphi \times T_\varphi)(H(x, y)) d\mu(x) = \int H(x, y) d\mu(x) =$$

$= g(y)$ (όπου το $T_\varphi(H(x, \varphi(y)))$ ορίζεται, αν η H θεωρηθεί ως συνάρτηση μόνο του x). Επειδή το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του T_φ έχουμε ότι η g είναι σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$ Άρα προσθέτοντας μια σταθερά c στην H (την $c = -\int H(x, y) d\mu(x)$) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int H(x, y) d\mu(x) = 0$. Επειδή η H δεν είναι $\mu \times \mu - \sigma.\pi.$ σταθερή, δεν θα είναι $\mu \times \mu - \sigma.\pi.$ ίση με το 0 και θα υπάρχει $h \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $\int H(x, y) h(y) d\mu(y) \neq 0$ για όλα τα x που ανήκουν σε ένα σύνολο θετικού μέτρου. Πράγματι, αν για κάθε $h \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ίσχυε $\int H(x,y)h(y)d\mu(y) = 0 \quad \mu - \sigma.\pi.$ για κάθε x, τότε για κάθε $h_1,\ h_2 \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ θα ίσχυε

$$\int (\int H(x,y)h_1(y)d\mu(y))h_2(x)d\mu(x) = 0.$$

Για $h_1 = X_A,\ h_2 = X_B$ όπου $A,\ B \in \mathcal{A}$, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\int_B \int_A H(x,y)d\mu(y)d\mu(x) = 0, \quad \text{ή ισοδύναμα, από Θεώρημα Fubini,}$$

$$\int_{A\times B} H(x,y)d(\mu\times\mu)(x,y) = 0 \ \text{ για κάθε } \ A\times B \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}. \ \text{ Τότε } \ H = 0$$

$\mu\times\mu - \sigma.\pi.$ (διότι τα μετρήσιμα ορθογώνια $A\times B$ με $A,\ B \in \mathcal{A}$ παράγουν την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$). Άτοπο.

Θέτουμε $f(x) = \int H(x,y)h(y)d\mu(y)$. Η f δεν είναι 0 $\mu - \sigma.\pi.$ και ισχύει ότι $\int f(x)d\mu(x) = 0$, καθώς $\int H(x,y)d\mu(x) = 0$, και από Θεώρημα Fubini έχουμε

$$\int f(x)d\mu(x) = \int\int H(x,y)h(y)d\mu(y)d\mu(x) = \int h(y)\int H(x,y)d\mu(x)d\mu(y).$$

Άρα η f δεν είναι σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$ Στην συνέχεια δείχνουμε ότι η f είναι σχεδόν περιοδική. Ορίζουμε τον τελεστή $\widetilde{H} : L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $\widetilde{H}(g(x)) = \int H(x,y)g(y)d\mu(y)$, για $g \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $x \in X$.

Ισχυρισμός. Ο $\widetilde{H}$ είναι συμπαγής τελεστής.

Απόδειξη ισχυρισμού. Ο $\widetilde{H}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ αφού από ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz και Θεώρημα Fubini,

$$\text{για } \ g \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu), \ \text{ ισχύει } \ \|\widetilde{H}(g)\|_2^2 =$$

$$= \int (\int H(x,y)g(y)d\mu(y))^2 d\mu(x) \le \int (\int |H(x,y)g(y)|d\mu(y))^2 d\mu(x) \le$$

$$\le \int (\int |H(x,y)|^2 d\mu(y) \int |g(y)|^2 d\mu(y))d\mu(x) =$$

$$= \|g\|_2^2 \int\int |H(x,y)|^2 d\mu(y)d\mu(x) = \|g\|_2^2 \int |H(x,y)|^2 d(\mu\times\mu)(x,y) =$$

$$= \|g\|_2^2 \|H\|_2^2 < \infty \text{ αφού } H \in L^2_{\mathbb{R}}(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu),$$

άρα $\|\widetilde{H}\|_2 \leq \|H\|_2$, δηλαδή ο $\widetilde{H}$ είναι φραγμένος.

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης $\{\widetilde{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $\|\widetilde{H}_n - \widetilde{H}\|_2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Τότε θα έχουμε την απόδειξη του ισχυρισμού αφού κάθε $\widetilde{H}_n$ είναι συμπαγής (ως τελεστής πεπερασμένης τάξης, Θεώρημα 2.5.11.) και το σύνολο των συμπαγών τελεστών είναι κλειστό. Έστω $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ ορθοκανονική βάση του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Για $i,\ j \in \mathbb{N}^*$, θέτουμε $y_{ij} \in L^2_{\mathbb{R}}(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu)$ με $y_{ij}(x,y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$ για κάθε $(x,y) \in X \times X$. Τότε το σύνολο $\{y_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}^*\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2_{\mathbb{R}}(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu)$.

$$\text{Έτσι, } H = \sum_{i,j=1}^{\infty} < H, y_{ij} > y_{ij}. \text{ Θέτουμε } H_n := \sum_{i,j=1}^{n} < H, y_{ij} > y_{ij}.$$

Τότε $\lim_n \|H_n - H\|_2 = 0$. Ορίζουμε για $n \in \mathbb{N}^*$ τον τελεστή

$$\widetilde{H}_n : L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu), \text{ ώστε}$$

$$\widetilde{H}_n g(x) = \int H_n(x,y) g(y) d\mu(y) \text{ για κάθε } g \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ και } x \in X.$$

Τότε ο $\widetilde{H}_n$ είναι γραμμικός και επειδή το σύνολο $\widetilde{H}_n(L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu))$ περιέχεται στο χώρο που παράγεται από το σύνολο $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, έχουμε ότι ο $\widetilde{H}_n$ είναι συμπαγής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ως τελεστής πεπερασμένης τάξης. Επίσης

$$\|\widetilde{H}_n - \widetilde{H}\|_2 \leq \|H_n - H\|_2 \text{ (όπως πριν), άρα } \lim_n \|\widetilde{H}_n - \widetilde{H}\|_2 = 0.$$

Άρα, αποδείχθηκε ο ισχυρισμός, δηλαδή ο $\widetilde{H}$ είναι συμπαγής τελεστής.

Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, από τις ιδιότητες του T_φ (και επειδή $(T_\varphi \times T_\varphi)(H) = H$) έχουμε:

$$T_\varphi^n f(x) = \int H(\varphi^n(x), y) h(y) d\mu(y) = \int T_\varphi^n(H(\varphi^n(x), y) h(y)) d\mu(y) =$$

$$= \int H(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) h(\varphi^n(y)) d\mu(y) = \int H(x,y) T_\varphi^n(h(y)) d\mu(y) = \widetilde{H}(T_\varphi^n h)(x).$$

Τότε το σύνολο $\overline{\{T_\varphi^n f \mid n \in \mathbb{N}\}}^{L^2} = \overline{\{\widetilde{H}(T_\varphi^n h) \mid n \in \mathbb{N}\}}^{L^2}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, αφού το σύνολο $\{T_\varphi^n h \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο, καθώς $\|T_\varphi^n h\|_2 = \|h\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ο $\widetilde{H}$ είναι συμπαγής τελεστής (Θεώρημα 2.5.11.). Επομένος αποδείχθηκε ότι η f είναι σχεδόν περιοδική. $\square$

Ορισμός 6.2.5. *Έστω* $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ *δυναμικό σύστημα και* $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ *σ-άλγεβρα για την οποία ισχύει* $(T_\varphi)^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$, *για κάθε* $A \in \mathcal{A}_1$. *Περιορίζοντας το δυναμικό σύστημα* $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ *στο* $(X,\mathcal{A}_1,\mu,\varphi)$, *παίρνουμε ένα δυναμικό σύστημα το οποίο καλείται* **παράγοντας** *του* $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$.

Ένας παράγοντας λέγεται **μη τετριμμένος** *αν η* $\mathcal{A}_1$ *περιέχει σύνολα* μ*-μέτρου διάφορα του 0 και 1.*

Θεώρημα 6.2.6. *Για το δυναμικό σύστημα* Φ=$(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$, *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i) Το Φ *είναι ασθενώς mixing.*
ii) Το Φ *δεν έχει μη τετριμμένους συμπαγείς παράγοντες.*
iii) Σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις του Φ *είναι μόνο οι σταθερές συναρτήσεις* $\mu - \sigma.\pi.$

Απόδειξη. $i) \Rightarrow iii)$ Από την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.2. παρατηρούμε ότι αν μία $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι σχεδόν περιοδική, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $S \subseteq \mathbb{N}$ με $\underline{d}(S) > 0$ ώστε $\|T^n_\varphi f - f\|_2 < \varepsilon$ για κάθε $n \in S$ $(*)$.
Από την άλλη, επειδή το Φ είναι ασθενώς mixing, έχουμε ότι για κάθε $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ και $\varepsilon > 0$ ότι υπάρχει (Πρόταση 5.2.4.) $E \subseteq \mathbb{N}$ με $d(E) = 0$ ώστε

για $n \notin E$ να ισχύει $|\int fT^n_\varphi f d\mu - (\int f d\mu)^2 | < \varepsilon$ $(**)$.

Ισχυρισμός. Υπάρχει $n \in S \cap E^c$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω ότι $S \cap E^c = \emptyset$. Είναι απλό κανείς να ελέγξει την ισχύ των παρακάτω σχέσεων:
1) για $E,\ F \subseteq \mathbb{N}$, αν $E \cap F = \emptyset$, τότε $\underline{d}(E \cup F) \geq \underline{d}(E) + \underline{d}(F)$, και
2) αν $E \subseteq \mathbb{N}$ τότε $\overline{d}(E) = 1 - \underline{d}(E^c)$.

Άρα έχουμε ότι $1 \geq \underline{d}(S \cup E^c) \geq \underline{d}(S) + \underline{d}(E^c) > \underline{d}(E^c) = 1 - \underline{d}(E) = = 1 - d(E) = 1$. Άτοπο. Επομένος υπαρχει $n \in S \cap E^c$.

Έστω $n \in S \cap E^c$. Για $\varepsilon > 0$, από τις $(*), (**)$ και ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz έχουμε ότι

$$|\int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2| \leq |\int f^2 d\mu - \int fT^n_\varphi f d\mu| + |\int fT^n_\varphi f d\mu -$$

$$-(\int f d\mu)^2| < |\int (f^2 - fT^n_\varphi f) d\mu| + \varepsilon \leq \int |f(f - T^n_\varphi f)| d\mu + \varepsilon \leq$$

$$\leq (\int |f|^2 d\mu)^{1/2} (\int |f - T_\varphi^n f|^2 d\mu)^{1/2} + \varepsilon = \|f\|_2 \|f - T_\varphi^n f\|_2 + \varepsilon <$$

$< \varepsilon(\|f\|_2 + 1)$, για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\int f^2 d\mu = (\int f d\mu)^2$. Τότε επειδή $\int f^2 d\mu = (\int f d\mu)^2 \leq (\int f^2 d\mu)(\int 1^2 d\mu) = \int f^2 d\mu$ θα έχουμε ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz και άρα η f είναι σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$

$iii) \Rightarrow ii)$ Έστω $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ συμπαγής παράγοντας του $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Αν ο παράγοντας αυτός ήταν μη τετριμμένος, θα υπήρχε $A \in \mathcal{A}_1$ ώστε $0 < \mu(A) < 1$. Η $f = X_A \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σχεδόν περιοδική αφού $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ συμπαγές δυναμικό σύστημα. Από υπόθεση έχουμε ότι η f θα είναι σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$, δηλαδή $f = 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ ή $f = 1$ $\mu - \sigma.\pi.$ άρα $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$, άτοπο.

$ii) \Rightarrow i)$ Έστω ότι το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δεν είναι ασθενώς mixing. Από το Θεώρημα 5.2.4. έχουμε ότι το δυναμικό σύστημα $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu, \varphi \times \varphi)$ δεν είναι εργοδικό, άρα ο τελεστής $T_\varphi \times T_\varphi$ δεν είναι εργοδικός (Πρόταση 4.3.2.). Από Πρόταση 6.2.4. θα υπάρχει $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ που είναι μη σταθερή $\mu - \sigma.\pi.$ και σχεδόν περιοδική. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $T_\varphi^n f$ είναι σχεδόν περιοδικές για $n \in \mathbb{N}$. Αν $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα ώστε όλες οι συναρτήσεις του συνόλου $\{T_\varphi^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ να είναι μετρήσιμες, τότε, από Πόρισμα 6.1.6. έχουμε ότι κάθε $h \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ είναι σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Άρα ο παράγοντας $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ είναι συμπαγής και μη τετριμμένος, λόγω του ότι η $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ δεν είναι σταθερή, άρα υπάρχει $A \in \mathcal{A}_1$ με $\mu(A) \notin \{0, 1\}$. Άτοπο από υπόθεση. □

Παρατήρηση 6.2.7. *Από Πόρισμα 5.2.8. έχουμε ότι αν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι ασθενώς mixing έχουμε το συμπέρασμα του Πορίσματος 6.2.3., δηλαδή αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) > 0.$$

Αν $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ όχι ασθενώς mixing, τότε από Θεώρημα 6.2.6. υπάρχει $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ συμπαγής παράγοντας του $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ο οποίος έχει την προηγούμενη ιδιότητα.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν, επεκτείνουμε τα προηγούμενα, προκειμένου να αποδείξουμε στα Κεφάλαια 9 και 10 το θεώρημα του Furstenberg (Θεώρημα IV).

Κεφάλαιο 7

Διάσπαση Δυναμικού Συστήματος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τη διάσπαση ενός δυναμικού συστήματος Lebesgue σε δυναμικά συστήματα που είναι εργοδικά (Παράγραφος 7.1). Με τη χρήση της διάσπασης αυτής μπορούμε να αποδείξουμε για αυθαίρετα δυναμικά συστήματα, αποτελέσματα που ισχύουν για εργοδικά δυναμικά συστήματα. Στην παράγραφο 7.2 συνδυάζεται η έννοια της διάσπασης με τον ορισμό των Skew-γινομένων δυναμικών συστημάτων.

7.1 Διάσπαση Συστήματος Lebesgue

Ορίζονται τα δυναμικά συστήματα Lebesgue, τα οποία είναι ισόμορφα με κανονικά δυναμικά συστήματα, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.7. Ένα Lebesgue δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ διασπάται, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.10., σε επί μέρους δυναμικά συστήματα $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$, όπου $y \in Y$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ παράγοντας του $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$, τα οποία είναι $\nu-$σχεδόν όλα εργοδικά, όπως αποδεικνύεται στο Θεώρημα 7.1.13.

Ορισμός 7.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι μέτρου πιθανότητας. Μια απεικόνιση $\pi \colon X \to Y$ λέμε ότι* **διατηρεί το μέτρο** *από τον X στον Y αν:*
i) η π είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη, και
ii) $\mu(\pi^{-1}(B)) = \nu(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$.

Ορισμός 7.1.2. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-άλγεβρες σε σύνολα X, Y αντίστοιχα και μ, ν μέτρα στις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντιστοίχως. Αν $\pi \colon X \to Y$ είναι μια απεικόνιση* *που διατηρεί το μέτρο από τον X στον Y, τότε η π καλείται* **ομομορφισμός** *των χώρων μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Αν επιπλέον η π είναι 1-1 και επί και η π^{-1} είναι $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$-μετρήσιμη, τότε η π καλείται* **ισομορφισμός** *των χώρων μέτρου, ενώ οι χώροι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ καλούνται* **μετρήσιμα ισόμορφοι**.

Ορισμός 7.1.3. *Ένας χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται* **χώρος Lebesgue** *αν είναι μετρήσιμα ισόμορφος με ένα κανονικό χώρο μέτρου.*

Ορισμός 7.1.4. *Ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται* **κανονικό σύστημα** *αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, η $\mathcal{A}$ είναι Borel σ-άλγεβρα, το μ είναι κανονικό μέτρο Borel και η φ είναι ομοιομορφισμός.*

Ορισμός 7.1.5. *Ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται* **σύστημα Lebesgue** *αν η φ είναι αντιστρέψιμη και ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Lebesgue.*

Ορισμός 7.1.6. *Δύο δυναμικά συστήματα $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1, \varphi_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2, \varphi_2)$ καλούνται* **ισόμορφα** *αν υπάρχει απεικόνιση $\pi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ 1-1 και επί, η οποία επιπλέον ικανοποιεί:*
i) $\mu_1(\pi(A)) = \mu_2(A)$, *για κάθε* $A \in \mathcal{A}_2$, *και*
ii) $\mu_1[\varphi_1^{-1}(\pi(A)) \triangle \pi(\varphi_2^{-1}(A))] = 0$, *για κάθε* $A \in \mathcal{A}_2$.
Τότε συμβολίζουμε $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1, \varphi_1) \cong (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2, \varphi_2)$.

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη (ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [17]), μας δίνει την σχέση μεταξύ των κανονικών συστημάτων και των συστημάτων Lebesgue.

Θεώρημα 7.1.7. *Κάθε κανονικό σύστημα είναι σύστημα Lebesgue, και κάθε σύστημα Lebesgue είναι ισόμορφο με κάποιο κανονικό σύστημα.*

Ορισμός 7.1.8. *Το δυναμικό σύστημα $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ καλείται* **παράγοντας** *του δυναμικού συστήματος $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ αν υπάρχει $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση π: $X \to Y$ η οποία ικανοποιεί: $\pi(\varphi(x)) = s(\pi(x))$ για κάθε $x \in X$.*

Παρατηρήσεις 7.1.9. 1) *Αν το δυναμικό σύστημα* $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ *είναι παράγοντας του δυναμικού συστήματος* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *μέσω της συνάρτησης* $\pi\colon X \to Y$, *τότε* $(Y, \mathcal{B}, \nu, s) \cong (X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$, *όπου* $\mathcal{A}_1 = \{\pi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$. *Ακόμα, η σ-άλγεβρα* $\mathcal{A}_1$ *είναι* φ*-αναλλοίωτη, δηλαδή* $\varphi^{-1}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$. *Πράγματι, από ορισμό της* $\mathcal{A}_1$ *έχουμε ότι η* $\pi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_1$ *είναι 1-1, επί και ισχύει* $\varphi^{-1}(\pi^{-1}(B)) = \pi^{-1}(s^{-1}(B))$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}$, *άρα* $\varphi^{-1}(\mathcal{A}_1) = \{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_1\} \subseteq \mathcal{A}_1$. *Ακόμα, επειδή* φ *και* s *διατηρούν το μέτρο, για* $B \in \mathcal{B}$, *έχουμε* $\mu(\varphi^{-1}(\pi^{-1}(B))\triangle\pi^{-1}(s^{-1}(B))) = \mu(\emptyset) = 0$.

2) *Το δυναμικό σύστημα* $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ *είναι παράγοντας του* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$, *αν* $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, *με* $\pi\colon X \to X$ *την ταυτοτική απεικόνιση.*

3) *Κάθε παράγοντας ενός δυναμικού συστήματος* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *μπορεί να ταυτιστεί με ένα παράγοντα της μορφής* $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$, *όπου η σ-άλγεβρα* $\mathcal{A}_1$ *είναι* φ*-αναλλοίωτη.*

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα διάσπασης μέτρου, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [15].

Θεώρημα 7.1.10. *(Διάσπασης Δυναμικού Συστήματος) Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *σύστημα Lebesgue και* $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ *σ-άλγεβρα με* $\varphi^{-1}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$. *Τότε υπάρχει σύστημα Lebesgue* $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu, s)$, *μετρήσιμη απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο* $\pi\colon X \to Y$ *με* $\pi^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_1$ *και οικογένεια μέτρων πιθανότητας* $\{\mu_y \mid y \in Y\}$ *στο* X *ώστε:*

i) *Το σύστημα* $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ *είναι παράγοντας του* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *μέσω της* π.

ii) *Η απεικόνιση* $\widetilde{s} : Y \to \{\mu_y \mid y \in Y\}$ *ώστε* $\widetilde{s}(y) = \mu_y$ *είναι μετρήσιμη.*

iii) *Ο χώρος* $(X, \mathcal{A}, \mu_y)$ *είναι χώρος Lebesgue και ισχύει* $\mu_y(\pi^{-1}(y)) = 1$ *σ.π.*

iv) *Για κάθε* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ισχύει* $\int f d\mu = \int (\int f d\mu_y) d\nu(y)$.

v) *Έστω* $E : L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^X$ *ώστε* $Ef(x) = \int f d\mu_{\pi(x)}$ *για* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $x \in X$. *Ο περιορισμός της συνάρτησης* E *στον* $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *είναι η ορθογώνια προβολή επί του* $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$. *Η συνάρτηση* Ef *λέγεται* **μέση τιμή** *της* f *δοθείσης της* $\mathcal{A}_1$ *και συμβολίζεται με* $E(f|\mathcal{Y})$.

vi) *Για κάθε* $A \in \mathcal{A}$ *ισχύει* $\mu_y(\varphi^{-1}(A)) = \mu_{s(y)}(A)$ $\nu - $*σ.π.*

Παρατηρήσεις 7.1.11. 1) *Η σχέση v) μας δείχνει ότι κάθε συνάρτηση* $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ *μπορεί να ταυτιστεί με την* $\mathcal{B}$*-μετρήσιμη συνάρτηση* $g(y) = \int f d\mu_y$. *Πράγματι,* $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$, *άρα* $Ef = f$, *οπότε* $f(x) = \int f d\mu_{\pi(x)}$ $\mu - $*σ.π. Άρα αν* $g : Y \to \mathbb{R}$ *με* $g(y) = \int f d\mu_y$, *έχουμε ότι* $f = g \circ \pi$. *Με την περαιτέρω ταύτιση* $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi) \cong (Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ *θεωρούμε ότι η* f *ταυτίζεται με την* g.

2) *Για* $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ *θεωρούμε την* $E(f|\mathcal{Y})$ *ταυτοχρόνως ως συνάρτηση*

του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ *και του* $L^2_{\mathbb{R}}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *και έχουμε την ακόλουθη ταύτιση:* $T_s(E(f|\mathcal{Y})) \equiv T_\varphi(E(f|\mathcal{Y}))$.

Θεώρημα 7.1.12. *(Birkhoff's pointwise ergodic theorem). Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *ένα δυναμικό σύστημα και* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Τότε σχεδόν για κάθε* $x \in X$ *ισχύει*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k_\varphi f(x) = Ef(x),$$

όπου Ef *είναι η μέση τιμή της* f *στην σ-άλγεβρα* $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} \mid \varphi^{-1}(A) = A\}$.

Θεώρημα 7.1.13. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *σύστημα Lebesgue και* $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} \mid \varphi^{-1}(A) = A\}$. *Θεωρούμε τον παράγοντα* $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ *του* $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ *και την διάσπαση* $\{\mu_y \mid y \in Y\}$ *του* μ *σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.10. Τότε η τετράδα* $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$ *είναι ένα εργοδικό σύστημα Legesgue* $\nu-$*σχεδόν για κάθε* $y \in Y$.

Απόδειξη. Η τετράδα $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$ είναι δυναμικό σύστημα $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$. Πράγματι, για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $\pi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ (όπου π απεικόνιση όπως στον Ορισμό 7.1.8.), άρα $\pi^{-1}(s^{-1}(B)) = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(B)) = \pi^{-1}(B)$ και τότε $s^{-1}(B) = B$, δηλαδή η s είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Από την ιδιότητα *vi*) του Θεωρήματος 7.1.10. έχουμε $\mu_y(\varphi^{-1}(A)) = \mu_{s(y)}(A) = \mu_y(A)$ $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$, άρα μ_y διατηρεί το μέτρο και τότε το $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$ είναι δυναμικό σύστημα. Ακόμα, από την ιδιότητα *iii*) του Θεωρήματος 7.1.10. έχουμε ότι το $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$ είναι σύστημα Lebesgue.

Το $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$ είναι εργοδικό. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.12. για $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει ότι

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k_\varphi f(x) = Ef(x) \quad \mu - \text{σχεδόν για κάθε } x \in X,$$

όπου Ef είναι η μέση τιμή της f δοθείσης της $\mathcal{A}_1$. Άρα

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k_\varphi f(x) = \int f d\mu_{\pi(x)} \quad \mu - \text{σχεδόν για κάθε } x \in X.$$

Έστω $y \in Y$. Τότε, αν $x \in \pi^{-1}(y)$ έχουμε $\int f d\mu_{\pi(x)} = \int f d\mu_y$. Καθώς $\mu_y(\pi^{-1}(y)) = 1$ $\nu - \sigma.\pi.$ έχουμε ότι $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k_\varphi f(x) = \int f d\mu_y \quad \mu_y - \text{σχεδόν για κάθε } x \in X,$$

που αποδεικνύει ότι το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu_y, \varphi)$ είναι εργοδικό $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$ (Πρόταση 4.3.2.). $\square$

7.2 Skew-Γινόμενο

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίστηκε η έννοια του παράγοντα ενός δυναμικού συστήματος $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$, ως ένα δυναμικό σύστημα ισόμορφο με ένα σύστημα της μορφής $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$, όπου $\mathcal{A}_1$ είναι μια φ-αναλλοίωτη υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$. Στην παράγραφο αυτή ορίζεται η έννοια του Skew-γινομένου ενός δυναμικού συστήματος με ένα χώρο μέτρου πιθανότητας, το οποίο είναι ένα νέο δυναμικό σύστημα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου, κάθε εργοδικό δυναμικό σύστημα είναι ένα Skew-γινόμενο για κάθε δεδομένο παράγοντά του (Θεώρημα 7.2.5.).

Ορισμός 7.2.1. *Έστω $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ ένα δυναμικό σύστημα, $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και απεικόνιση*

$$\sigma : Y \to \{f : Z \to Z \mid \ \vartheta(f^{-1}(A)) = \vartheta(A)\},$$

δηλαδή μια απεικόνιση από τον Y στις απεικονίσεις που διατηρούν το μέτρο του χώρου $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$, ώστε η

$$\widetilde{\sigma} : Y \times Z \to Z \ \ \text{με} \ \widetilde{\sigma}(y, z) = \sigma(y)(z)$$

να είναι $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mathcal{C})$-μετρήσιμη. Αν $X = Y \times Z$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, $\mu = \nu \times \vartheta$ και $\varphi : Y \times Z \to Y \times Z$ με $\varphi(y, z) = (s(y), \widetilde{\sigma}(y, z))$, τότε η τετράδα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται **Skew-γινόμενο** *του δυναμικού συστήματος $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ με τον χώρο μέτρου πιθανότητας $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$.*

Πρόταση 7.2.2. *Έστω $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ ένα δυναμικό σύστημα και $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας. Αν $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι το Skew-γινόμενο του δυναμικού συστήματος $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ με τον χώρο μέτρου πιθανότητας $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$, τότε η τετράδα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι δυναμικό σύστημα.*

Απόδειξη. Για $B \times C \in \mathcal{A}$ έχουμε $\varphi^{-1}(B \times C) = \{(y, z) \in Y \times Z \mid \ \varphi(y, z) \in B \times C\} = \{(y, z) \in Y \times Z \mid \ s(y) \in B$ και $\widetilde{\sigma}(y, z) \in C\} = (s^{-1}(B) \times Z) \cap \widetilde{\sigma}^{-1}(C) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A}$. Άρα η φ είναι μετρήσιμη. Ακόμα, επείδη οι s και $\sigma(y)$ για $y \in Y$ διατηρούν το μέτρο, από Θεώρημα Fubini έχουμε

$$(\nu \times \vartheta)(\varphi^{-1}(B \times C)) = \int_Z \int_Y X_{\varphi^{-1}(B \times C)}(y, z) d\nu(y) d\vartheta(z) =$$

$$= \int_Z \int_Y X_{B\times C}(\varphi(y,z))d\nu(y)d\vartheta(z) = \int_Z \int_Y X_{B\times C}(s(y),\sigma(y)(z))d\nu(y)d\vartheta(z) =$$

$$= \int_{s^{-1}(B)} \int_Z X_{\sigma(y)^{-1}(C)}(z)d\vartheta(z)d\nu(y) = \int_{s^{-1}(B)} \vartheta(\sigma(y)^{-1}(C))d\nu(y) =$$

$$= \int_{s^{-1}(B)} \vartheta(C)d\nu(y) = \vartheta(C)\nu(s^{-1}(B)) = \vartheta(C)\nu(B) = (\nu\times\vartheta)(B\times C).$$

Επειδή τα προηγούμενα ισχύουν για τα ορθογώνια $B\times C$ που παράγουν την $\mathcal{A}$, θα ισχύουν για τυχόν υποσύνολό της, άρα φ μετρήσιμος μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.2.3. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ το Skew-γινόμενο του δυναμικού συστήματος $(Y,\mathcal{B},\nu,s)$ με τον χώρο μέτρου πιθανότητας $(Z,\mathcal{C},\vartheta)$. Τότε, το $(Y,\mathcal{B},\nu,s)$ είναι παράγοντας του $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την προβολή π: $X\to Y$ όπου $\pi(y,z)=y$, η οποία είναι προφανώς $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη. Αν $\mathcal{A}_1=\{\pi^{-1}(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$ έχουμε ότι η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα (σαν αντίστροφη εικόνα σ-άλγεβρας) και $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}$. Ακόμα, έχουμε ότι $\pi\circ\varphi = s\circ\pi$. Πράγματι, για $(y,z)\in X$ ισχύει $(\pi\circ\varphi)(y,z) = = \pi(s(y),\sigma(y)(z)) = s(y) = (s\circ\pi)(y,z)$. Από ορισμό της $\mathcal{A}_1$ έχουμε ότι $\pi^{-1}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}_1$ είναι 1-1, επί και ισχύει $\varphi^{-1}(\pi^{-1}(B)) = \pi^{-1}(s^{-1}(B))$ για κάθε $B\in\mathcal{B}$ δηλαδή $\varphi^{-1}(A)\in\mathcal{A}_1$ για κάθε $A\in\mathcal{A}_1$ και άρα $(X,\mathcal{A}_1,\mu,\varphi)$ παράγοντας του $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$. Ακόμα επειδή φ και s διατηρούν το μέτρο, έχουμε για $B\in\mathcal{B}$, ότι $\mu(\pi^{-1}(B)) = \mu(\varphi^{-1}(\pi^{-1}(B))) = \mu(\pi^{-1}(s^{-1}(B))) = \mu(s^{-1}(B)\times Z) =$
$= \nu(s^{-1}(B))\vartheta(Z) = \nu(B)$, και $\mu(\varphi^{-1}(\pi^{-1}(B))\triangle\pi^{-1}(s^{-1}(B))) = \mu(\emptyset) = 0$.
Άρα το $(Y,\mathcal{B},\nu,s)$ είναι παράγοντας του $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ και μάλιστα $(Y,\mathcal{B},\nu,s)\cong(X,\mathcal{A}_1,\mu,\varphi)$. □

Πρόταση 7.2.4. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ το Skew-γινόμενο του δυναμικού συστήματος $(Y,\mathcal{B},\nu,s)$ με τον χώρο μέτρου πιθανότητας $(Z,\mathcal{C},\vartheta)$. Αν για $y\in Y$ και $A\in\mathcal{A}$, θεωρήσουμε $\mu_y=\delta_y\times\vartheta$, όπου δ_y το μέτρο Dirac στην $\mathcal{B}$, $A_y=\{z\in Z\mid (y,z)\in A\}$ και την προβολή π: $X\to Y$, τότε*
i) $\mu_y(\pi^{-1}(\{y\}))=1$ *για κάθε* $y\in Y$
ii) $\mu(A)=\int\mu_y(A)d\nu(y)$ *για κάθε* $y\in Y,\ A\in\mathcal{A}$, *και*
iii) $\mu_y(\varphi^{-1}(A))=\mu_{s(y)}(A)$ *για κάθε* $y\in Y,\ A\in\mathcal{A}$.

Απόδειξη. *i)* $\mu_y(\pi^{-1}(\{y\})) = \mu_y(\{y\}\times Z) = \delta_y(\{y\})\vartheta(Z) = 1$.
ii) $\mu(A) = \int\vartheta(A_y)d\nu(y) = \int(\delta_y\times\vartheta)(A)d\nu(y) = \int\mu_y(A)d\nu(y)$.

$iii)\ \ \mu_y(\varphi^{-1}(A)) = \vartheta((\varphi^{-1}(A))_y) = \vartheta(\{z \in Z \mid (y,z) \in \varphi^{-1}(A)\}) =$
$= \vartheta(\{z \in Z \mid \varphi(y,z) \in A\}) = \vartheta(\{z \in Z \mid (s(y), \sigma(y)(z)) \in A\}) =$
$= \vartheta(\sigma(y)^{-1}(\{z \in Z \mid (s(y), z) \in A\})) = \vartheta(\{z \in Z \mid (s(y), z) \in A\}) =$
$= \vartheta(A_{s(y)}) = \mu_{s(y)}(A)$, αφού η $\sigma(y)$ διατηρεί το μέτρο. □

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι το δυναμικό μας σύστημα είναι επιπλέον και εργοδικό, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα (για απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται [23]).

Θεώρημα 7.2.5. *(Rohlin, 1966 [23]). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ένα εργοδικό δυναμικό σύστημα και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ μια φ-αναλλοίωτη σ-άλγεβρα (δηλαδή $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$ για κάθε $A \in \mathcal{A}_1$). Τότε υπάρχει ένα δυναμικό σύστημα $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ ισόμορφο με το $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$, ώστε το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ να είναι το Skew-γινόμενο του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ με έναν χώρο μέτρου πιθανότητας.*

Πρόταση 7.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ένα εργοδικό σύστημα Lebesgue και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ μια φ-αναλλοίωτη σ-άλγεβρα ($\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$ για κάθε $A \in \mathcal{A}_1$). Τότε υπάρχει δυναμικό σύστημα $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ ισόμορφο με το $(X, \mathcal{A}_1, \mu, \varphi)$ ώστε το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ να είναι το Skew-γινόμενο του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ με έναν χώρο μέτρου πιθανότητας. Ακόμα, το $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του Θεωρήματος διάσπασης 7.1.10.*

Απόδειξη. Άμεση από Πρόταση 7.2.4. (περνώντας από χαρακτηριστικές σε απλές και από απλές σε αυθαίρετες μετρήσιμες συναρτήσεις έχουμε από το $ii)$ της Πρότασης 7.2.4. το $iii)$ του Θεωρήματος 7.1.10.) και Θεώρημα 7.2.5. □

Πρόταση 7.2.7. *Για κάθε f συνάρτηση του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει $T_s(E(f|\mathcal{Y})) = E(T_\varphi f|\mathcal{Y})$, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι το Skew-γινόμενο του δυναμικού συστήματος $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ με έναν χώρο μέτρου πιθανότητας.*

Απόδειξη. Για $f = X_A$ όπου $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $T_s(E(f|\mathcal{Y}))(y) = E(f|\mathcal{Y})(s(y)) = \int X_A d\mu_{s(y)} = \mu_{s(y)}(A) = \mu_y(\varphi^{-1}(A)) = \int X_{\varphi^{-1}(A)} d\mu_y = \int T_\varphi(X_A) d\mu_y = E(T_\varphi f|\mathcal{Y})(y)$. Από γραμμικότητα, έχουμε το προηγούμενο για απλές συναρτήσεις, άρα και για κάθε $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. □

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ το Skew-γινόμενο του δυναμικού συστήματος $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ με τον χώρο μέτρου πιθανότητας $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$. Αν $\pi : X \to Y$ είναι η απεικόνιση του Ορισμού 7.1.8., ορίζουμε $\widetilde{X} = \bigcup_{y \in Y} (\pi^{-1}(y) \times \pi^{-1}(y)) \subseteq X \times X$, $\widetilde{\mu} = \int \widetilde{\mu_y} d\nu(y)$, όπου $\widetilde{\mu_y} = \mu_y \times \mu_y$, $\widetilde{A} = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})|_{\widetilde{X}}$ και $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ με $\widetilde{\varphi}((y,z),(y,z')) = ((s(y), \sigma(y)(z)), (s(y), \sigma(y)(z')))$.

Χάριν ευκολίας (μέσω της απεικόνισης $((y,z),(y,z')) \mapsto (y,z,z')$) θα συμβολίζουμε την προηγούμενη τετράδα με $\widetilde{X} = Y \times Z \times Z$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$, $\widetilde{\mu} = \nu \times \vartheta \times \vartheta$ και $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ με $\widetilde{\varphi}(y,z,z') = (s(y), \sigma(y)(z), \sigma(y)(z'))$.

Πρόταση 7.2.8. *Η τετράδα $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi})$ είναι δυναμικό σύστημα.*

Απόδειξη. Εντελώς ανάλογη της Πρότασης 7.2.2. □

Ορισμός 7.2.9. *Το δυναμικό σύστημα $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi})$ καλείται* **σχετικό τετράγωνο** *του δυναμικού συστήματος $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ και συμβολίζεται με $X \times_y X$.*

Πρόταση 7.2.10. *Για f, g συναρτήσεις του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει:*

$$\int_{X \times_y X} f(y,z) g(y,z') d\widetilde{\mu}(y,z,z') = \int_Y E(f|\mathcal{Y})(y) E(g|\mathcal{Y})(y) d\nu(y).$$

Απόδειξη. Για f, g τυχαίες συναρτήσεις του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε

$$\text{από Θεώρημα Fubini ότι } \int_{X \times_y X} f(y,z) g(y,z') d\widetilde{\mu}(y,z,z') =$$

$$= \int_Y \int_Z \int_Z f(y,z) g(y,z') d\mu_y(z) d\mu_y(z') d\nu(y) =$$

$$= \int_Y \int_Z g(y,z') (\int_Z f(y,z) d\mu_y(z)) d\mu_y(z') d\nu(y) =$$

$$= \int_Y E(f|\mathcal{Y}) \int_Z g(y,z') d\mu_y(z') d\nu(y) = \int_Y E(f|\mathcal{Y})(y) E(g|\mathcal{Y})(y) d\nu(y).$$

□

Κεφάλαιο 8

Επεκτάσεις Δυναμικών Συστημάτων

Ένα δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ λέγεται επέκταση του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$, αν το $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ είναι παράγοντας του $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται η σχετικά ασθενώς mixing επέκταση και η συμπαγής επέκταση ενός δυναμικού συστήματος. Αποδεικνύεται ένα διχοτομικό θεώρημα, ανάλογο του Θεωρήματος 6.2.6., σύμφωνα με το οποίο αν ένα εργοδικό δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu,$ $\varphi)$ δεν είναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$, τότε υπάρχει ενδιάμεσος συμπαγής παράγοντας. Τέλος, με την βοήθεια του διχοτομικού αυτού θεωρήματος, για κάθε δυναμικό σύστημα ορίζεται ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ως δείκτης, ο οποίος καθορίζει τον μεγιστικό παράγοντα του δυναμικού συστήματος.

Ορισμός 8.0.1. Έστω $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ παράγοντας του δυναμικού συστήματος $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται **σχετικά ασθενώς mixing επέκταση** του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ αν το δυναμικό σύστημα $X \times_y X$ είναι εργοδικό. (Για απλότητα, λέμε ακόμα ότι η $\mathcal{A}$ είναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση της $\mathcal{B}$.)

Ορισμός 8.0.2. Έστω $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ παράγοντας του εργοδικού συστήματος Lebesgue $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$. Θεωρούμε την διάσπαση του μ σε $\{\mu_y \mid \ y \in Y\}$ (Θεώρημα 7.1.10.). Μια συνάρτηση $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται **σχεδόν περιοδική ως προς τον παράγοντα** $\mathcal{Y}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $g_1, ..., g_k \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $s-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $j \equiv j(n, y)$ με $1 \leq j \leq k$ ώστε $\|T^n_\varphi f - g_j\|_y < \varepsilon$ (όπου $\|f\|^2_y = \int |f|^2 d\mu_y$). Συμβολίζουμε το σύνολο αυτών των συναρτήσεων του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ με **AP** (Almost Periodic).

Ορισμός 8.0.3. Το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται **συμπαγής επέκταση** του παράγοντα $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ αν οι AP ως προς $\mathcal{Y}$ συναρτήσεις του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πυκνές στο $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, δηλαδή

$$\overline{\{f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid f \in AP \text{ ως προς } \mathcal{Y}\}}^{L^2} = L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

(Λέμε ακόμα για απλότητα ότι η $\mathcal{A}$ είναι συμπαγής επέκταση της $\mathcal{B}$.)

Τώρα, διατυπώνουμε ένα θεώρημα, που θα χρειαστούμε παρακάτω.

Θεώρημα 8.0.4. Έστω $\mathcal{L}$ ένας κλειστός υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Έστω ότι υπάρχει σύνολο $\mathcal{L}_0$ που παράγει τον $\mathcal{L}$, με την ιδιότητα ότι για κάθε $f,\ g \in \mathcal{L}_0$ οι συναρτήσεις $f \vee g = \max\{f, g\}$ και $f \wedge g = \min\{f, g\}$ ανήκουν στον $\mathcal{L}$ (ο $\mathcal{L}$ καλείται **άλγεβρα** που παράγεται από την $\mathcal{L}_0$). Τότε υπάρχει μια σ-άλγεβρα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mathcal{L} = L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{C}, \mu)$. Ακόμα, αν ο χώρος $\mathcal{L}$ είναι T_φ-αναλλοίωτος (δηλαδή $\{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{L}\} \subseteq \mathcal{L}$) τότε η $\mathcal{C}$ είναι φ-αναλλοίωτη (δηλαδή $\{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{C}$).

Θεώρημα 8.0.5. Έστω $\mathcal{X} = (X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ εργοδικό δυναμικό σύστημα μη σχετικά ασθενώς mixing επέκταση του $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu, s)$. Τότε υπάρχει παράγοντας $\mathcal{X}^*$ του $\mathcal{X}$ ώστε ο $\mathcal{Y}$ να είναι παράγοντας του $\mathcal{X}^*$ και μάλιστα ο $\mathcal{X}^*$ να είναι γνήσια συμπαγής επέκταση του $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ τυχόν και $\varepsilon_i > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon^2$. Το $\mathcal{X}$ είναι εργοδικό δυναμικό σύστημα άρα από Θεώρημα 7.2.5. το $\mathcal{X}$ γράφεται σαν Skew-γινόμενο του $\mathcal{Y}$ με κάποιο χώρο μέτρου πιθανότητας $(Z, \mathcal{C}, \vartheta)$ (τότε $\varphi(y, z) = (s(y), \sigma(y)(z))$, από Ορισμό 7.2.1.). Αφού η επέκταση δεν είναι σχετικά ασθενώς mixing έχουμε ότι το δυναμικό σύστημα $X \times_y X$ δεν είναι εργοδικό, άρα ο $T_{\widetilde{\varphi}}$ δεν είναι εργοδικός ($\widetilde{\varphi}(y, z, z') = (s(y), \sigma(y)(z), \sigma(y)(z'))$), άρα θα υπάρχει $T_{\widetilde{\varphi}}$-αναλλοίωτη συνάρτηση $H(x, x') \in L^2_{\mathbb{R}}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ (δηλαδή $T_{\widetilde{\varphi}} H(x, x') = H(x, x')$) η οποία δεν είναι συνάρτηση μόνο του x ή του x'. Γράφοντας $\widetilde{X} = Y \times Z \times Z$ έχουμε $H(x, x') = H(y, z, z')$. Υπάρχει συνάρτηση $h \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε ο τελεστής

$$H * h(y, z) = \int H(y, z, z') h(y, z') d\vartheta(z') \text{ να μην είναι συνάρτηση μόνο του } y$$

(απόδειξη ανάλογη της Πρότασης 6.2.4.). Έχουμε, $T_\varphi(H * h)(y, z) =$

$$= H * h(s(y), \sigma(y)(z)) = \int H(s(y), \sigma(y)(z), z') h(s(y), z') d\vartheta(z') =$$

$$= \int H(s(y),\sigma(y)(z),\sigma(y)(z'))h(s(y),\sigma(y)(z'))d\vartheta(z') =$$

$$= \int T_{\widetilde{\varphi}}H(y,z,z')T_{\varphi}h(y,z')d\vartheta(z') = \int H(y,z,z')T_{\varphi}h(y,z')d\vartheta(z') =$$

$= H * T_{\varphi}h(y,z)$, αφού $\sigma(y)$ διατηρεί το μέτρο και H $T_{\widetilde{\varphi}}$-αναλλοίωτη. Για κάθε $y \in Y$ ο ολοκληρωτικός τελεστής $\widetilde{H} : L^2_{\mathbb{R}}(X,\mu_y) \to L^2_{\mathbb{R}}(X,\mu_y)$ με $\widetilde{H}(p(y,z)) = H * p(y,z) = \int H(y,z,z')p(y,z')d\vartheta(z')$ είναι συμπαγής στον $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mu_y)$ (απόδειξη ανάλογη της Πρότασης 6.2.4.), και επειδή $\{T^n_{\varphi}(H*h) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\widetilde{H}(T^n_{\varphi}h) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ σχετικά συμπαγές (αφού $\{T^n_{\varphi}h \mid n \in \mathbb{Z}\}$ φραγμένο και $\widetilde{H}$ συμπαγής), έχουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει $M \equiv M(i,y)$ ώστε το σύνολο $\{T^n_{\varphi}(H*h) \mid -M \le n \le M\}$ να είναι ε_i-πυκνό στο $\{T^n_{\varphi}(H*h) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ στην νόρμα $\|\cdot\|_y$ του $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mu_y)$. Θεωρούμε M_i αρκετά μεγάλο ώστε $M_i > M(i,y)$ για κάθε y εκτός συνόλου E_i με $\nu(E_i) < \varepsilon_i$.

Ορίζουμε $f(y,z) = \begin{cases} 0, & y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \\ H*h(y,z), & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Έχουμε

$$\|f - H*h\|_2^2 = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \int |H*h|^2 d\vartheta d\nu \le \|H\|_2^2 \|h\|_\infty^2 \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \le$$

$$\le \|H\|_2^2 \|h\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \|H\|_2^2 \|h\|_\infty^2 \varepsilon^2, \text{ αυθαίρετα μικρό}$$

και άρα $f \in AP$ ως προς $\mathcal{Y}$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ και M αρκετά μεγάλο, η οικογένεια $\{0\} \cup \{T^n_{\varphi}(H*h) \mid -M \le n \le M\}$ είναι ε-πυκνή στο σύνολο $\{T^n_{\varphi}f \mid n \in \mathbb{Z}\}$ στην νόρμα του $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mu_y)$ για κάθε y. Έστω

$\mathcal{L}_0 = \{H*h \mid H \in L^2_{\mathbb{R}}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{\mu}),\ T_{\widetilde{\varphi}}H = H,\ h \in L^{\infty}_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)\}$ και $\mathcal{L}$ η

άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{L}_0$. Παρατηρούμε ότι για το $\mathcal{L}$ ισχύουν οι υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, και επειδή $T_{\varphi}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ λόγω του ότι $T_{\varphi}(H*h) = H*T_{\varphi}h$ έχουμε ότι υπάρχει μια φ-αναλλοίωτη σ-άλγεβρα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $\mathcal{L} = L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{C},\mu)$. Από πριν έχουμε ότι οι AP συναρτήσεις ως προς $\mathcal{Y}$ είναι πυκνές στο $\mathcal{L}_0$ άρα και στο $\mathcal{L}$, δηλαδή αν $\mathcal{X}^* = (X,\mathcal{C},\mu,\phi)$ έχουμε ότι $\mathcal{X}^*$ συμπαγής επέκταση του $\mathcal{Y}$.

Για να δείξουμε ότι $\mathcal{C} \supsetneq \pi^{-1}(\mathcal{B})$ (δηλαδή ότι η προηγούμενη επέκταση είναι γνήσια), αρκεί να υπάρχει $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{C},\mu)$ ώστε $f \neq 0$ και $\int f X_B d\mu = 0$ για κάθε $B \in \pi^{-1}(\mathcal{B})$ αφού τότε $L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{C},\mu) \supsetneq L^2_{\mathbb{R}}(X,\pi^{-1}(\mathcal{B},\mu) \cong L^2_{\mathbb{R}}(Y,\mathcal{B},\nu)$. Όμως, όπως πριν, υπάρχει $T_{\widetilde{\varphi}}$-αναλλοίωτη συνάρτηση $H(x,x') \in L^2_{\mathbb{R}}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{\mu})$ η οποία δεν είναι συνάρτηση μόνο του x ή του x' και συνάρτηση $h \in L^{\infty}_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ ώστε η συνάρτηση $H * h$ να μην είναι συνάρτηση μόνο του y. Άρα υπάρχει συνάρτηση AP η οποία δεν είναι συνάρτηση μόνο του y, από το οποίο έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 8.0.6. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ συμπαγής επέκταση του $(Y,\mathcal{B},\nu,s)$ και $A \in \mathcal{A}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σύνολο $A' \in \mathcal{A}$ με $A' \subseteq A$, $X_{A'}$ σχεδόν περιοδική και $\mu(A') > \mu(A) - \varepsilon$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε κάτι γενικότερο. Από υπόθεση, για $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ και τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση f' σχεδόν περιοδική ώστε $\|f - f'\|_2 < \varepsilon^{3/2}/2$. f' σχεδόν περιοδική, άρα υπάρχουν $g_1,...,g_{k-1} \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και σχεδόν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $j \equiv j(n,y)$ με $1 \le j \le k-1$ ώστε $\|T^n_\varphi f' - g_j\|_y < \varepsilon/2$ και έστω $g_k = 0$. Αν $B = \{y \in Y \mid \|f - f'\|_y < \varepsilon/2\}$ τότε

$$(\frac{1}{2}\varepsilon^{3/2})^2 > \|f - f'\|_2^2 = \int \|f - f'\|_y^2 d\nu(y) \ge \int_{B^c} \|f - f'\|_y^2 d\nu(y) \ge$$

$\ge \nu(B^c)\varepsilon^2/4$, δηλαδή $\nu(B^c) < \varepsilon$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την προβολή π: $X \to Y$ και θέτουμε $f_B = f X_{\pi^{-1}(B)}$. Αν $y \in s^{-n}(B)$, τότε

$$\|T^n_\varphi f_B - T^n_\varphi f'\|_y = \|f_B - f'\|_{s^n(y)} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ αφού } s^n(y) \in B. \text{ Αν } j \equiv j(n,y)$$

$$\text{τότε} \quad \|T^n_\varphi f_B - g_j\|_y \le \|T^n_\varphi f_B - T^n_\varphi f'\|_y + \|T^n_\varphi f' - g_j\|_y < \varepsilon.$$

Ενώ αν $y \notin s^{-n}(B)$, έχουμε $f_B = 0$, άρα $T^n_\varphi f_B = 0$. Τότε ισχύει $\|T^n_\varphi f_B - g_k\|_y = 0 < \varepsilon$. Δείξαμε ότι f_B σχεδόν περιοδική. Για $f = X_A$, $A' = A \cap \pi^{-1}(B)$, όπου B το προηγούμενο σύνολο, έχουμε $A' \subseteq A$, $X_{A'} = f_B$ σχεδόν περιοδική και $\mu(A) - \mu(A') = \mu(A \triangle A') \le \mu((\pi^{-1}(B))^c) = \mu(\pi^{-1}(B^c)) = \nu(B^c) < \varepsilon$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Λήμμα 8.0.7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ σχετικά ασθενώς mixing επέκταση του $(Y,\mathcal{B},\nu,y) = \mathcal{Y}$ και $f,\ g \in L^2_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$. Αν $E(f|\mathcal{Y}) = 0$ ή $E(g|\mathcal{Y}) = 0$, τότε $* - \lim_h \|E(fT^h_\varphi g|\mathcal{Y})\|_2 = 0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι ισχύει $* - \lim_h \|E(fT^h_\varphi g|\mathcal{Y})\|_2 = 0$ αν και μόνο

$$\text{αν} \quad * - \lim_h \|E(fT^h_\varphi g|\mathcal{Y})\|_2^2 = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|E(fT^k_\varphi g|\mathcal{Y})\|_2^2 = 0.$$

$$\text{Αλλά,} \quad \|E(fT_{\varphi}^{k}g|\mathcal{Y})\|_2^2 = \int_Y (E(fT_{\varphi}^{k}g|\mathcal{Y})(y))^2 d\nu(y) =$$

$$= \int_Y (\int_Z f(y,z)T_{\varphi}^{k}g(y,z)d\mu_y(z))(\int_Z f(y,z')T_{\varphi}^{k}g(y,z')d\mu_y(z'))d\nu(y) =$$

$$= \int_Y \int_Z \int_Z f(y,z)f(y,z')T_{\varphi}^{k}g(y,z)T_{\varphi}^{k}g(y,z')d\mu_y(z)d\mu_y(z')d\nu(y) =$$

$$= \int_{X\times_Y X} (f\otimes f)(y,z,z')g(y^k(y),\sigma(y)^k(z))g(y^k(y),\sigma(y)^k(z'))d\widetilde{\mu}(y,z,z') =$$

$$= \int_{X\times_Y X} (f\otimes f)(y,z,z')(g\otimes g)(\widetilde{\varphi}^k(y,z,z'))d\widetilde{\mu}(y,z,z') =$$

$$= \int (f\otimes f)T_{\widetilde{\varphi}}^{k}(g\otimes g)d\widetilde{\mu}, \ \ \text{όπου} \ \ (f\otimes f)(y,z,z') = f(y,z)f(y,z')$$

και $(g\otimes g)(y,z,z') = g(y,z)g(y,z')$ συναρτήσεις του $X \times_Y X$. Από υπόθεση $X \times_Y X$ εργοδικό, τότε $T_{\widetilde{\varphi}}$ εργοδικός και άρα (από Πρόταση 4.3.2.)

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_{\widetilde{\varphi}}^{k}(g\otimes g) = \int g\otimes g d\widetilde{\mu} = c \ \ \text{σταθερά} \ \ \widetilde{\mu}-\sigma.\pi. \ \ \text{και από Πρόταση}$$

7.2.10. ισχύει $\int f\otimes f d\widetilde{\mu} = \int E(f|\mathcal{Y})^2 d\nu, \ \int g\otimes g d\widetilde{\mu} = \int E(g|\mathcal{Y})^2 d\nu.$

$$\text{Έχουμε} \ \ |\int (f\otimes f)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_{\widetilde{\varphi}}^{k}(g\otimes g)d\widetilde{\mu} - c\int f\otimes f d\widetilde{\mu}\,| \leq$$

$$\leq \ \|f\otimes f\|_2 \ \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_{\widetilde{\varphi}}^{k}(g\otimes g) - c\|_2 \to 0, \ \text{καθώς} \ n\to\infty \ \ (\text{Θεώρημα} \ \ Yosida).$$

$$\text{Άρα} \ \ \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|E(fT_{\varphi}^{k}g)\|_2^2 = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int (f\otimes f)T_{\widetilde{\varphi}}^{k}(g\otimes g)d\widetilde{\mu} =$$

$$= \lim_n \int (f\otimes f)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_{\widetilde{\varphi}}^{k}(g\otimes g)d\widetilde{\mu} = (\int f\otimes f d\widetilde{\mu})(\int g\otimes g d\widetilde{\mu}) =$$

$$= \left(\int E(f|\mathcal{Y})^2 d\nu\right)\left(\int E(g|\mathcal{Y})^2 d\nu\right) = 0. \qquad \square$$

Θεώρημα 8.0.8.(Furstenberg, Katznelson, Ornstein, 1982 [13]). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ εργοδικό δυναμικό σύστημα, σχετικά ασθενώς mixing επέκταση του $(Y, \mathcal{B}, \nu, y) = \mathcal{Y}$. Τότε, αν $f_1, ..., f_m \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει:

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\prod_{l=1}^{m} T_\varphi^{lk} f_l \ - \ \prod_{l=1}^{m} T_y^{lk} E(f_l|\mathcal{Y}))\|_2 \ = \ 0.$$

Απόδειξη. Επαγωγή στο m.

$m = 1:$ θα δείξουμε ότι $\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1 \ - \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_y^k E(f_1|\mathcal{Y})\|_2 \ = \ 0.$

Αρκεί να το δείξουμε για $E(f_1|\mathcal{Y}) = 0$, αφού στην γενική περίπτωση θεωρούμε $g = f_1 - E(f_1|\mathcal{Y})$ και έχουμε $E(g|\mathcal{Y}) = 0$. Άρα αν έχουμε

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k g\|_2 = 0,$$

(βλέποντας την $E(f_1|\mathcal{Y})$ σαν συνάρτηση του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και σαν συνάρτηση του $L^2_{\mathbb{R}}(Y, \mathcal{B}, \nu)$, ισχύει $T_y^k E(f_1|\mathcal{Y}) \equiv T_\varphi^k E(f_1|\mathcal{Y})$ για $k = 1, ..., n$) τότε

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1 \ - \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_y^k E(f_1|\mathcal{Y})\|_2 = 0, \quad \text{δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Αν $E(f_1|\mathcal{Y}) = 0$, επειδή $f_1 \in L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, έχουμε $f_1 \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, άρα (από ιδιότητες του μ_y) $\int f_1 d\mu = \int(\int f_1 d\mu_y) d\nu(y) = \int E(f_1|\mathcal{Y}) d\nu(y) = 0$.
Το $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι εργοδικό, τότε και T_φ εργοδικός, άρα

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1 \longrightarrow \int f_1 d\mu = 0, \quad \text{καθώς } n \longrightarrow \infty.$$

Από το θεώρημα του Yosida έχουμε: $\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_\varphi^k f_1\|_2 = 0$.

Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για m. Θα δείξουμε την ισχύ του για $m+1$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l\|_2 \ = \ 0$$

δεδομένου ότι υπάρχει $1 \leq \alpha \leq m+1$ ώστε $E(f_\alpha|\mathcal{Y}) = 0$

$$\text{αφού από την σχέση:} \quad \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l \; - \; \prod_{l=1}^{m+1} T_y^{lk} E(f_l|\mathcal{Y}) \; =$$

$$= \; \sum_{j=i}^{m+1} (\prod_{l=1}^{j-1} T_\varphi^{lk} f_l) T_\varphi^{jk} (f_j \; - \; E(f_j|\mathcal{Y})) \prod_{l=j+1}^{m+1} T_\varphi^{lk} E(f_l|\mathcal{Y})$$

(όπου $T_\varphi^{lk} E(f_l|\mathcal{Y}) \equiv T_y^{lk} E(f_l|\mathcal{Y})$, βλέποντας την $E(f_l|\mathcal{Y})$ ταυτοχρόνως σαν συνάρτηση του $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και του $L^2_{\mathbb{R}}(Y, \mathcal{B}, \nu)$, $l = 1, ..., m+1$), και άρα αφού $E(f_j - E(f_i|\mathcal{Y})|\mathcal{Y}) = 0$ θα έχουμε το συμπέρασμα (απόδειξη ακριβώς όπως στο Θεώρημα 5.2.6.) επειδή κάθε φορά το ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης θα είναι ίσο με μηδέν. Αν $x_k = \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l$ αρκεί από Πόρισμα 5.1.9. να δείξουμε $* - \lim_h (\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n < x_k, x_{k+h} >) = 0$ και θα έχουμε το αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $< x_k, x_{k+h} >=$

$$= \int \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l \prod_{r=1}^{m+1} T_\varphi^{r(k+h)} f_r d\mu \; = \; \int \prod_{l=1}^{m+1} (T_\varphi^{lk} f_l T_\varphi^{l(k+h)} f_l) d\mu \geq 0.$$

Πράγματι, αν $x \in X$ ώστε $f_l(x) \geq 0$ τότε $T_\varphi^{lk} f_l(x) \geq 0, T_\varphi^{l(k+h)} f_l(x) \geq 0$ και άρα $T_\varphi^{lk} f_l(x) T_\varphi^{l(k+h)} f_l(x) \geq 0$. Αν $x \in X$ με $f_l(x) \leq 0$ τότε $T_\varphi^{lk} f_l(x) \leq 0$, $T_\varphi^{l(k+h)} f_l(x) \leq 0$ και άρα $T_\varphi^{lk} f_l(x) T_\varphi^{l(k+h)} f_l(x) \geq 0$ δηλαδή $T_\varphi^{lk} f_l T_\varphi^{l(k+h)} f_l \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $l = 1, ..., m+1$. Από ιδιότητες T_φ έχουμε ότι:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n < x_k, x_{k+h} > = \; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{lk} f_l \prod_{r=1}^{m+1} T_\varphi^{r(k+h)} f_r d\mu \; =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int T_\varphi^k (\prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} f_l \prod_{r=1}^{m+1} T_\varphi^{r(k+h)-k} f_r) d\mu =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \prod_{l=1}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} (f_l T_\varphi^{lh} f_l). \text{ Από επαγωγική υπόθεση έχουμε}$$

$$\lim_n \| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\prod_{l=2}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} (f_l T_\varphi^{lh} f_l) \; - \; \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})) \|_2 = 0,$$

και επειδή η norm σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή, για την $f_1 T_\varphi^h f_1$ έχουμε:

$$\lim_n | \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n < f_1 T_\varphi^h f_1, \prod_{l=2}^{m+1} T_\varphi^{(l-1)k} (f_l T_\varphi^{lh} f_l) - \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y}) > | = 0.$$

Όμως,

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < f_1 T_\varphi^h f_1, \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y}) > | =$$

$$= |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int f_1 T_\varphi^h f_1 \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y}) d\mu| =$$

$$= |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int (\int f_1 T_\varphi^h f_1 \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y}) d\mu_y) d\nu| =$$

$$= |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y}) (\int f_1 T_\varphi^h f_1 d\mu_y) d\nu |=$$

$$=| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} (E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})) E(f_1 T_\varphi^h f_1|\mathcal{Y}) d\nu |=$$

$$= |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int \prod_{l=1}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\int \prod_{l=1}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|T_y^{(\alpha-1)k} E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2 \| \prod_{l=1,\, l\neq\alpha}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})\|_2$$

από ανισότητα Cauchy-Buniakowski-Schwarz. Αλλά, $\|T_\varphi\| \leq 1,\ \|T_y\| \leq 1$ και $f_l \leq |f_l| \leq \|f_l\|_\infty$ $\mu - \sigma.\pi.$ Τότε ισχύουν $T_\varphi^{lh} f_l \leq \|f_l\|_\infty$ για $1 \leq l \leq m+1$, $\|T_y^{(\alpha-1)k} E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2 \leq \|E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2$, και $|T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})| \leq \|f_l\|_\infty^2$, για $1 \leq l \leq m+1,\ l \neq \alpha$. Άρα

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|T_y^{(\alpha-1)k} E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2 \| \prod_{l=1,\, l\neq\alpha}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l|\mathcal{Y})\|_2 \leq$$

$$\leq \|E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2 \prod_{l=1,\, l\neq\alpha}^{m+1} \|f_l\|_\infty^2.$$

Επειδή $E(f_\alpha|\mathcal{Y}) = 0$, από Λήμμα 8.0.7. έχουμε

$$* - \lim_h \|E(f_\alpha T_\varphi^h f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2 = 0, \text{ τότε και } * - \lim_h \|E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha|\mathcal{Y})\|_2 = 0.$$

Άρα $0 \leq * - \lim_h \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < x_k, x_{k+h} > \leq * - \lim_h \lim_n (|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < x_k, x_{k+h} > -$

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f_1 T_\varphi^h f_1, \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l | \mathcal{Y}) > | +$$

$$+ |\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f_1 T_\varphi^h f_1, \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l | \mathcal{Y}) > |) =$$

$$= * - \lim_h \lim_n |\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f_1 T_\varphi^h f_1, \prod_{l=2}^{m+1} T_y^{(l-1)k} E(f_l T_\varphi^{lh} f_l | \mathcal{Y}) > | \leq$$

$$\leq (* - \lim_h \|E(f_\alpha T_\varphi^{\alpha h} f_\alpha | \mathcal{Y})\|_2) \prod_{l=1,\, l \neq \alpha}^{m+1} \|f_l\|_\infty^2 = 0,$$

από τα προηγούμενα, που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 8.0.9. Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\{F_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ αύξουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X (όπου ω_1 ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός). Τότε υπάρχει $\alpha_0 < \omega_1$ ώστε $F_\alpha = F_{\alpha_0}$ για κάθε $\alpha_0 < \alpha < \omega_1$.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $F_\alpha \subsetneq F_{\alpha+1}$ για κάθε $\alpha < \omega_1$. Θεωρούμε $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X και $\{q_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ μία αρίθμηση των θετικών ρητών. Επειδή $F_\alpha \subsetneq F_{\alpha+1}$ υπάρχουν $n,\, m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$D(x_n,\, q_m) \cap F_\alpha = \emptyset \text{ και } D(x_n,\, q_m) \cap F_{\alpha+1} \neq \emptyset.$$

Έστω συνάρτηση $h : \omega_1 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $h(\alpha) = (m_\alpha,\, n_\alpha) \in \mathcal{L}$, όπου $\omega_1 = \bigcup \{\alpha \mid \alpha$ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός$\}$ και

$$\mathcal{L} = \{(m,\, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid D(x_n,\, q_m) \cap F_\alpha = \emptyset \text{ και } D(x_n,\, q_m) \cap F_{\alpha+1} \neq \emptyset\}$$

(υπάρχει τέτοια από αξίωμα επιλογής).
Η h είναι 1-1, διότι αν $\alpha < \beta$ και $h(\alpha) = (m_\alpha,\, n_\alpha)$, $h(\beta) = (m_\beta,\, n_\beta)$ τότε

$$D(x_{n_\beta},\, q_{m_\beta}) \cap F_\beta = \emptyset, \text{ άρα } D(x_{n_\beta},\, q_{m_\beta}) \cap F_{\alpha+1} = \emptyset$$

ενώ $D(x_{n_\alpha},\ q_{m_\alpha}) \cap F_{\alpha+1} \neq \emptyset$, δηλαδή $h(\alpha) \neq h(\beta)$. Αυτό είναι άτοπο, αφού ω_1 υπεραριθμήσιμο σύνολο ενώ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ αριθμήσιμο. $\square$

Θεώρημα 8.0.10.(Furstenberg's Structure Theorem). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ εργοδικό σύστημα Lebesgue. Υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός η και σύστημα από φ-αναλλοίωτες υπο-σ-άλγεβρες $\{\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{A} \mid \ \xi \leq \eta\}$ τέτοιο ώστε:
i) $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid \ \mu(A) \in \{0, 1\}\}$.
ii) Για κάθε $\xi < \eta$, η $\mathcal{A}_{\xi+1}$ είναι συμπαγής επέκταση της $\mathcal{A}_\xi$ με $\mathcal{A}_{\xi+1} \supsetneq \mathcal{A}_\xi$.
iii) Αν $\xi \leq \eta$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε η $\bigcup_{\xi' < \xi} \mathcal{A}_{\xi'}$ παράγει την $\mathcal{A}_\xi$.
iv) Είτε $\mathcal{A}_\eta = \mathcal{A}$ είτε η $\mathcal{A}$ είναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση της $\mathcal{A}_\eta$.

Απόδειξη. Τα $\mathcal{A}_\xi$ ορίζονται με υπερπεπερασμένη επαγωγή. Θέτουμε $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid \ \mu(A) \in \{0, 1\}\}$. Έστω ότι έχουν οριστεί $\{\mathcal{A}_\gamma \mid \ \gamma < \xi\}$. Αν ξ είναι επόμενος διατακτικού, δηλαδή $\xi = \alpha + 1 < \omega_1$, κοιτάμε την $\mathcal{A}_\alpha$. Αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha$, τότε θέτουμε $\eta = \alpha$. Αν η $\mathcal{A}$ είναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση της $\mathcal{A}_\alpha$, θέτουμε $\eta = \alpha$. Αν η $\mathcal{A} \supsetneq \mathcal{A}_\alpha$ είναι συμπαγής επέκταση, θέτουμε $\eta = \xi$ και $\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}$. Αν καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις δεν ισχύει, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.0.5. θεωρούμε ως $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{A}$ μία μη τετριμμένη συμπαγή επέκταση της $\mathcal{A}_\alpha$. Αν ξ είναι οριακός διατακτικός αριθμός με $\xi < \omega_1$, τότε θέτουμε $\mathcal{A}_\xi = \sigma(\{\mathcal{A}_\gamma \mid \ \gamma < \xi\})$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3.76. ο χώρος πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή ο μετρικός χώρος $(\widetilde{A}, d)$ είναι διαχωρίσιμος. Εφόσων οι σ-άλγεβρες $\{\mathcal{A}_\xi\}_{\xi < \omega_1}$ δημιουργούν μια αύξουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $(\widetilde{A}, d)$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.0.9., υπάρχει $\eta < \omega_1$ ώστε $\mathcal{A}_\eta = \mathcal{A}$. $\square$

Ορισμός 8.0.11. Ο παράγοντας $(X, \mathcal{A}_\eta, \mu, \varphi)$ του $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ καλείται **μεγιστικός παράγοντας**.

Κεφάλαιο 9

Εργοδικό Θεώρημα Furstenberg

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα του Furstenberg (1977) ([14]).

Θεώρημα 9.0.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ σύστημα Lebesgue. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) > 0.$$

9.1 Szemerédi Ιδιότητες

Ορίζουμε την Weak Szemerédi-ιδιότητα (Ορισμός 9.1.6.), οπότε, μια αναδιατύπωση του θεωρήματος του Furstenberg είναι:

Κάθε σύστημα Lebesgue έχει την Weak Szemerédi-ιδιότητα.

Για τις ανάγκες της απόδειξης του προηγούμενου αποτελέσματος, ορίζεται και η Strong Szemerédi-ιδιότητα (Ορισμός 9.1.5.).

Ορισμός 9.1.1. *Έστω $(G, +)$ αβελιανή ημιομάδα. Ένα υποσύνολο E της G καλείται* **syndetic** *αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο F της G τέτοιο ώστε $G = \bigcup_{g \in F} \{s \in G \mid \ g + s \in E\}$.*

Πρόταση 9.1.2. *Έστω $E \subseteq \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $E \subseteq \mathbb{Z}$). Το E είναι syndetic αν και μόνο αν υπάρχει θετικός φυσικός αριθμός n ώστε για κάθε m φυσικό (ακέραιο αντίστοιχα) κάποιο από τα στοιχεία $m, m+1, ..., m+n-1$ ανήκει στο E.*

Απόδειξη. Έστω $E \subseteq \mathbb{N}$ (η απόδειξη για $E \subseteq \mathbb{Z}$ είναι εντελώς ανάλογη).
($\Rightarrow$) Αν προς άτοπο, δεν ισχύει το συμπέρασμα για ένα syndetic σύνολο $E \subseteq \mathbb{N}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε κανένα από τα $m, m+1, ..., m+n-1$ δεν ανήκει στο E. Άρα, για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ έχουμε ότι $\bigcup_{n\in F}\{s \in \mathbb{N} \mid n+s \in E\} \subsetneq \mathbb{N}$, άτοπο.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε το σύνολο $F = \{0, ..., n-1\}$ όπου το $n \in \mathbb{N}^*$ πληροί την υπόθεση. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε ότι $m \in E$ ή $m+1 \in E$ ή ... ή $m+n-1 \in E$ δηλαδή $\bigcup_{n\in F}\{s \in \mathbb{N} \mid n+s \in E\} = \mathbb{N}$ και άρα E syndetic υποσύνολο του $\mathbb{N}$. □

Ορισμός 9.1.3. *Ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{N}$ ($E \subseteq \mathbb{Z}$ αντίστοιχα) καλείται* **thick** *αν περιέχει αυθαίρετα μεγάλα διαστήματα του $\mathbb{N}$ (του $\mathbb{Z}$ αντίστοιχα).*

Παρατήρηση 9.1.4. *Από τους προηγούμενους ορισμούς έχουμε ότι ένα σύνολο E είναι syndetic αν τέμνει μη τετριμμένα κάθε thick σύνολο, και ένα σύνολο R είναι thick αν τέμνει μη τετριμμένα κάθε syndetic σύνολο.*

Ορισμός 9.1.5. *Μία φ-αναλλοίωτη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ (δηλαδή $\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$) λέγεται ότι έχει την* **SS−ιδιότητα** *μέσω της φ (ή απλώς ότι έχει την SS-ιδιότητα) αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και κάθε $k,\ t \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε thick σύνολο $E \subseteq \mathbb{N}$, υπάρχουν $n_1, ..., n_t \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $FS(n_1, ..., n_t) \subseteq E$ και*

$$\mu(\bigcap_{0\le i_s\le k,\ 1\le s\le t} \varphi^{-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)) > \delta, \quad \text{όπου}$$

$FS(n_1, ..., n_t) = \{n_{i_1} + ... + n_{i_m} \mid 1 \le m \le t,\ 1 \le i_1 < ... < i_m \le t\}$.

Ορισμός 9.1.6. *Μία φ-αναλλοίωτη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ότι έχει την* **WS−ιδιότητα** *μέσω της φ (ή απλώς ότι έχει την WS-ιδιότητα) αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) > 0.$$

Πρόταση 9.1.7. *Η ιδιότητα SS είναι ισχυρότερη της WS.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μια φ-αναλλοίωτη σ-άλγεβρα που έχει την SS-ιδιότητα. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, από υπόθεση, για τυχόν $k \in \mathbb{N}^*$ και $t = 1$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

για κάθε *thick* σύνολο $E \subseteq \mathbb{N}$ να υπάρχει $n_E \in E$ με $\mu(\bigcap_{l=0}^{k} \varphi^{-ln_E}(A)) > \delta$.

Δηλαδή το σύνολο $R = \{n \in \mathbb{N} \mid \ \mu(\bigcap_{l=0}^{k} \varphi^{-ln}(A)) > \delta\}$ τέμνει κάθε thick σύνολο, άρα είναι syndetic. Από Πρόταση 9.1.2. έχουμε ότι υπαρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $p \in \mathbb{N}$ κάποιο από τα στοιχεία $p, ..., p + r - 1 \in R$.

Γράφοντας $n = q_n r + u_n$, όπου $0 \leq u_n < r$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\underline{d}(R) = \liminf_n \frac{|R \cap \{0, ..., n-1\}|}{n} \geq \liminf_n \frac{|R \cap \{0, ..., q_n r - 1\}|}{q_n r + u_n} \geq$$

$$\geq \liminf_n \frac{q_n}{(q_n + 1)r} = \frac{1}{r} > 0, \quad \text{και άρα} \quad \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) \geq$$

$$\geq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) X_R(k) \geq \delta \liminf_n \frac{|R \cap \{1, ..., n\}|}{n} = \delta \underline{d}(R) > 0,$$

δηλαδή η $\mathcal{A}$ έχει την WS-ιδιότητα. □

9.2 Απόδειξη Θεωρήματος Furstenberg

Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε το θεώρημα του Furstenberg για εργοδικά συστήματα Lebesgue, και στην συνέχεια γενικεύουμε για τυχαίο σύστημα Lebesgue.

Θεώρημα 9.2.1. *(Furstenberg,1977 [14]) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ εργοδικό σύστημα Lebesgue. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε*

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) > 0.$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η WS-ιδιότητα μεταφέρεται στις σχετικά ασθενώς mixing επεκτάσεις.

Θεώρημα 9.2.2. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,\varphi)$ μια σχετικά ασθενώς mixing επέκταση του $\mathcal{Y}=(Y,\mathcal{B},\nu,s)$. Αν η $\mathcal{B}$ έχει την WS-ιδιότητα, τότε και η $\mathcal{A}$ έχει την WS-ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)>0$ και $f_0=X_A$. Τότε υπάρχει $\alpha>0$ ώστε $\nu(\{y\in Y \mid \ E(X_A\mid\mathcal{Y})\geq\alpha\})>0$. Πράγματι, $0<\mu(A)=\int\mu_y(A)d\nu(y)$ δηλαδή $0<\nu(\{y\in Y \mid \ \mu_y(A)>0\})=\lim_n\nu(\{y\in Y \mid \ \mu_y(A)\geq 1/n\})$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\nu(\{y\in Y \mid \mu_y(A)\geq 1/n_0\})>0$. Όμως $E(X_A\mid\mathcal{Y})=\int X_A d\mu_y=\mu_y(A)$, άρα για $\alpha=1/n_0>0$ έπεται ο προηγούμενος ισχυρισμός. Από Θεώρημα 8.0.8. για τυχόν $m\in\mathbb{N}^*$, για τις συναρτήσεις $f_1=...=f_m=X_A$ ισχύει:

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\prod_{l=1}^{m}T_\varphi^{lk}X_A-\prod_{l=1}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y}))\|_2=0,$$

άρα (επειδή η norm σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή) για την f_0 έχουμε:

$$\lim_n |<f_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}T_\varphi^{lk}X_A>-<f_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})>|=0,\ \text{αλλά,}$$

$$<f_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})>=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int(\int f_0\prod_{l=1}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})d\mu_y)d\nu=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int E(f_0|\mathcal{Y})\prod_{l=1}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})d\nu=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\prod_{l=0}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})d\nu.$$

Αν $A_0=\{y\in Y \mid \ E(X_A\mid\mathcal{Y})\geq\alpha\}$, έχουμε $E(X_A|\mathcal{Y})\geq\alpha X_{A_0}\geq 0$ και άρα $T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})\geq\alpha X_{s^{-lk}(A_0)}\geq 0$ για κάθε $k\geq l\geq 0$. Τότε:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\prod_{l=0}^{m}T_s^{lk}E(X_A|\mathcal{Y})d\nu\geq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\alpha^{m+1}X_{\bigcap_{l=0}^{m}s^{-lk}(A_0)}d\nu=$$

$$=\alpha^{m+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu(\bigcap_{l=0}^{m}s^{-lk}(A_0)),\ \text{άρα για μεγάλο n έχουμε}$$

$$<f_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}T_\varphi^{lk}X_A>=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu(\bigcap_{l=0}^{m}\varphi^{-lk}(A))\ >\frac{\alpha^{m+1}}{2n}\sum_{k=1}^{n}\nu(\bigcap_{l=0}^{m}s^{-lk}(A_0)).$$

$$\text{Τότε,}\quad \liminf_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu(\bigcap_{l=0}^{m}\varphi^{-lk}(A))\geq\frac{\alpha^{m+1}}{2}\liminf_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu(\bigcap_{l=0}^{m}s^{-lk}(A_0))>0,$$

επειδή $\nu(A_0) > 0$ και η $\mathcal{B}$ έχει την WS-ιδιότητα. Άρα και η $\mathcal{A}$ έχει την WS-ιδιότητα. □

Αποδεικνύουμε ότι η SS-ιδιότητα περνάει στις συμπαγείς επεκτάσεις.

Θεώρημα 9.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ συμπαγής επέκταση του $(Y, \mathcal{B}, \nu, s)$ όπου η $\mathcal{B}$ έχει την SS-ιδιότητα, τότε η $\mathcal{A}$ έχει την SS-ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Από Πρόταση 8.0.6. μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f = X_A$ είναι σχεδόν περιοδική. Υπάρχει $c > 0$ και $B \in \mathcal{B}$ με $\nu(B) > 0$ ώστε για κάθε $y \in \mathcal{B}$, $\mu_y(A) > c$ (αλλιώς $\mu(A) = 0$). Έστω $t,\ k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon = \sqrt{\frac{c}{8(k+1)^t}} > 0$. Από υπόθεση για την f, υπάρχει $r \in \mathbb{N}^*$ και συναρτήσεις $g_1, ..., g_r \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και σχεδόν για κάθε $y \in Y$, υπάρχει $j \equiv j(n, y)$, $1 \leq j \leq r$ με $\|T^n_\varphi f - g_j\|_y < \varepsilon$. Από Θεώρημα 3.6.2. υπάρχει $N \equiv N(\Sigma, t, r) \in \mathbb{N}^*$ ώστε αν $W(\Sigma, N) = \bigcup_{i=1}^r C_i$ υπάρχει $w = w_1...w_N = w(u_1, ..., u_t)$ λέξη στο $W(\Sigma, N)$ με t μεταβλητές και $1 \leq i_0 \leq r$ ώστε $w(i_1, ..., i_t) \in C_{i_0}$ για κάθε $i_1, ..., i_t \in \Sigma$ (όπου $\Sigma = \{0, ..., k\}$ αλφάβητο και $W(\Sigma, N)$ οι λέξεις στο Σ με μήκος N). Η $\mathcal{B}$ έχει την SS-ιδιότητα άρα υπάρχει $\eta > 0$ ώστε για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ thick υπάρχουν $n_1, ..., n_N \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$FS(n_1, ..., n_N) \subseteq E, \ \text{ και } \ \nu\Big(\bigcap_{0 \leq i_j \leq k,\ 1 \leq j \leq N} s^{-(i_1 n_1 + ... + i_N n_N)}(B)\Big) > \eta.$$

Ισχυρισμός. Έστω D ο πληθάριθμος του συνόλου των λέξεων στο Σ με μήκος N και t μεταβλητές. Τότε για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ thick υπάρχουν $n_1, ..., n_t \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$FS(n_1, ..., n_t) \subseteq E, \ \text{ και } \ \mu\Big(\bigcap_{0 \leq i_j \leq k,\ 1 \leq j \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A)\Big) > \delta := \frac{c\eta}{2D},$$

δηλαδή η $\mathcal{A}$ έχει την SS-ιδιότητα.

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω $E \subseteq \mathbb{N}$ thick. Επιλέγουμε $u_1, ..., u_N \in \mathbb{N}$ με

$$FS(u_1, ..., u_N) \subseteq E \ \text{ ώστε } \ \nu\Big(\bigcap_{0 \leq i_j \leq k,\ 1 \leq j \leq N} s^{-(i_1 n_1 + ... + i_N n_N)}(B)\Big) > \eta.$$

$$\text{Για } y \in \bigcap_{0 \leq i_j \leq k,\ 1 \leq j \leq N} s^{-(i_1 n_1 + ... + i_N n_N)}(B), \ \text{ αν}$$

$$C_m = \{i_1 ... i_N \in W(\Sigma, N) \mid \ j(i_1 u_1 + ... + i_N u_N, y) = m\}, \ m = 1, ..., r,$$

έχουμε $W(\Sigma, N) = \bigcup_{m=1}^{r} C_m$, δηλαδή αν $i_1...i_N \in C_m$, τότε

$$\|T_{\varphi}^{i_1u_1+...+i_Nu_N} f - g_m\|_y < \varepsilon.$$

Από Θεώρημα 3.6.2. υπάρχουν $w(x_1, ..., x_t) = w_1...w_N$ λέξη στο $W(\Sigma, N)$ με t μεταβλητές και $1 \le m \le r$ ώστε $w(i_1, ..., i_t) \in C_m$ για κάθε $i_1, ..., i_t \in \Sigma$. Άρα αν θεωρήσουμε απεικόνιση $h : W(\Sigma, N) \to \mathbb{N}$ με $h(i_1...i_N) = i_1u_1+...+i_Nu_N$,

$$\text{τότε} \quad \|T_{\varphi}^{h(w(i_1,...,i_t))} f - g_m\|_y < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \ i_1, ..., i_t \in \ \Sigma.$$

Αν $M = h(w(0, ..., 0))$, τότε έχουμε $h(w(i_1, ..., i_t)) = M + i_1n_1 + ... + i_tn_t$, όπου $n_i = h(w(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)) - M$, $1 \le i \le t$ (η μονάδα μπαίνει στην θέση της u_i μεταβλητής).

$$\text{Τότε} \quad \| \, T_{\varphi}^{M+i_1n_1+...+i_tn_t} f - g_m \, \|_y < \varepsilon \ \text{ για κάθε } \ i_1, ..., i_t \in \ \Sigma.$$

Για $\widetilde{y} = s^M(y)$ έχουμε (Θεώρημα 7.1.10.) $\mu_{\widetilde{y}}(A \setminus \varphi^{-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)) =$

$$= \mu_y(\varphi^{-M}(A \setminus \varphi^{-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A))) = \mu_y(\varphi^{-M}(A) \setminus \varphi^{-M}(\varphi^{-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)))$$

$$= \mu_y(\varphi^{-M}(A) \setminus \varphi^{-M-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)) \le \mu_y(\varphi^{-M}(A) \triangle \varphi^{-M-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A))$$

$$= \|X_{\varphi^{-M}(A)} - X_{\varphi^{-M-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)}\|_y^2 = \|T_{\varphi}^M f - T_{\varphi}^{M+i_1n_1+...+i_tn_t} f\|_y^2 \le$$

$$\le (\|T_{\varphi}^M f - g_m\|_y + \|T_{\varphi}^{M+i_1n_1+...+i_tn_t} f - g_m\|_y)^2 < 4\varepsilon^2,$$

αφού $\|T_{\varphi}^{M+i_1n_1+...+i_tn_t} f - g_m\|_y < \varepsilon$ για $0 \le i_j \le k, \ 1 \le j \le t$.

$y \in s^{-h(i_1...i_N)}(B)$ για κάθε $i_1, ..., i_N \in \Sigma$, άρα $y \in s^{-h(w(0,...,0))}(B) = = s^{-M}(B)$, δηλαδή $\widetilde{y} = s^M(y) \in \mathcal{B}$, και τότε $\mu_{\widetilde{y}}(A) > c$. Έχουμε:

$$\mu_{\widetilde{y}}(\bigcap_{0 \le i_j \le k, \ 1 \le j \le t} \varphi^{-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)) \ge \mu_{\widetilde{y}}(A) -$$

$$- \sum_{0 \le i_j \le k, \ 1 \le j \le t} \mu_{\widetilde{y}}(A \setminus \varphi^{-(i_1n_1+...+i_tn_t)}(A)) > c - (k+1)^t 4\varepsilon^2 = \frac{c}{2}$$

δηλαδή για κάθε $y \in \bigcap_{0 \le i_j \le k, \ 1 \le j \le N} s^{-(i_1n_1+...+i_Nn_N)}(B) =: B_0, \ B_0 \subseteq B$, υπάρχει λέξη με t μεταβλητές $w(x_1, ..., x_t)$ και $n_1, ..., n_t$, ορισμένα όπως πριν,

$$\text{με } \ \nu(B_0) > \eta \ \text{ και } \ \mu_{s^M(y)}\Big(\bigcap_{0 \leq i_j \leq k,\ 1 \leq j \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + \ldots + i_t n_t)}(A)\Big) > \frac{c}{2}.$$

Οι επιλογές της λέξης $w(x_1, ..., x_t)$ είναι το πολύ D και τότε το πολύ D είναι και οι επιλογές για τα $n_1, ..., n_t$, άρα θα υπάρχει $B_1 \subseteq B_0$, $B_1 \in \mathcal{B}$ με $\nu(B_1) > \eta/D$ στο οποίο το M και τα $n_1, ..., n_t$ είναι σταθερά. Τότε

$$\mu\Big(\bigcap_{0 \leq i_j \leq k,\ 1 \leq j \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + \ldots + i_t n_t)}(A)\Big) \geq \frac{c}{2}\nu(B_1) > \frac{c\eta}{2D} = \delta > 0,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό και το θεώρημα. □

Θεώρημα 9.2.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα και $\{\mathcal{A}_\xi\}_\xi$ μια ολικά διατεταγμένη αλυσίδα από φ-αναλλοίωτες υπό-σ-άλγεβρες της $\mathcal{A}$ που έχουν την SS-ιδιότητα. Αν η άλγεβρα $\bigcup_\xi \mathcal{A}_\xi$ παράγει την $\mathcal{A}$, τότε και η $\mathcal{A}$ έχει την SS-ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}^*$. Για $\varepsilon = \frac{1}{(k+1)^t} > 0$ υπάρχει ξ_1 και $A_0' \in \mathcal{A}_{\xi_1}$ ($\{\mathcal{A}_\xi\}_\xi$ ολικά διατεταγμένη οικογένεια) τέτοια ώστε $\mu(A \vartriangle A_0') < \varepsilon\mu(A)/4$. Για τον παράγοντα $(X, \mathcal{A}_{\xi_1}, \mu, \varphi)$ υπάρχει δυναμικό σύστημα $(Y, \mathcal{A}_{\xi_0}, \nu, s)$, απεικόνιση π: $X \to Y$ που διατηρεί το μέτρο ώστε $\mathcal{A}_{\xi_1} = \pi^{-1}(\mathcal{A}_{\xi_0})$ και μετρήσιμη συνάρτηση $\widetilde{s}: \ Y \to \{\mu \mid \mu$ μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathcal{A})\}$. Υπάρχει $A_0'' \in \mathcal{A}_{\xi_0}$ ώστε $A_0' = \pi^{-1}(A_0'')$ και αν $B = \{y \in A_0'' \mid \ \mu_y(A) < 1 - \frac{\varepsilon}{2}\}$ τότε $B \in \mathcal{A}_{\xi_0}$ και $\nu(B) < \frac{\mu(A)}{2}$. Πράγματι, $\widetilde{s}$ μετρήσιμη δηλαδή η απεικόνιση $s_A(y) = \mu_y(A)$ είναι $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{A}_{\xi_0})$-μετρήσιμη και άρα $B = \{y \in A_0'' \mid \ s_A(y) < 1 - \frac{\varepsilon}{2}\} = A_0'' \cap [0 \leq s_A < 1 - \frac{\varepsilon}{2}] \in \mathcal{A}_{\xi_0}$. Αν δεν ισχύει $\nu(B) < \mu(A)/2$, θα είναι $\nu(B) \geq \mu(A)/2$, αλλά τότε:

$$\mu(A \vartriangle A_0') \geq \mu(A_0' \setminus A) = \int \mu_y(A_0' \setminus A) d\nu \geq \int_{A_0''} \mu_y(A_0' \setminus A) d\nu(y),$$

όμως $\pi^{-1}(A_0'') = A_0'$ και άρα $\mu_y(A_0') = 1$, τότε $\mu_y(A_0' \setminus A) = \mu_y(A_0' \cup A) -$

$$-\mu_y(A) = 1 - \mu_y(A) \quad \text{άρα} \quad \int_{A_0''} \mu_y(A_0' \setminus A) d\nu(y) = \int_{A_0''} (1 - \mu_y(A)) d\nu(y) \geq$$

$$\geq \int_B \mu_y(A_0' \setminus A) d\nu(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}\nu(B) \geq \frac{\varepsilon\mu(A)}{4}, \ \text{ δηλαδή } \ \mu(A \vartriangle A_0') \geq \frac{\varepsilon\mu(A)}{4},$$

άτοπο. Θεωρούμε $A_0 = A_0'' \backslash B$. Τότε $A_0 \in \mathcal{A}_{\xi_0}$ και $\nu(A_0'') = \nu(A_0) + \nu(B) < \nu(A_0) + \frac{\mu(A)}{2}$, δηλαδή $\nu(A_0) > \nu(A_0'') - \frac{\mu(A)}{2}$, αλλά η π είναι απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο και άρα $\mu(A_0') = \mu(\pi^{-1}(A_0'')) = \nu(A_0'')$ δηλαδή $\nu(A_0) > > \mu(A_0') - \frac{\mu(A)}{2}$ και $\mu(A_0') = \mu(A) - \mu(A \setminus A_0') \geq \mu(A) - \mu(A \vartriangle A_0') > \mu(A) - -\frac{\varepsilon\mu(A)}{4}$, άρα $\nu(A_0) > 0$. $A_0 \in \mathcal{A}_{\xi_0}$, και επειδή $\nu(A_0) > 0$, και η $\mathcal{A}_{\xi_0}$ έχει την SS-ιδιότητα, έχουμε ότι υπάρχει $\eta > 0$ ώστε για κάθε thick σύνολο E, υπάρχουν $n_1, ..., n_t \in \mathbb{N}$ ώστε $FS(n_1, ..., n_t) \subseteq E$ και

$$(*) \qquad \nu(\bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} s^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A_0)) > \eta.$$

για $\delta = \eta/2$ και E thick σύνολο τυχόν, βρίσκουμε $n_1, ..., n_t$ που ικανοποιούν την $(*)$ και $FS(n_1, ..., n_t) \subseteq E$.

$$\text{Για κάθε } y \in \bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} s^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A_0) \text{ έχουμε}$$

$$\mu_y(\varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A)) \geq 1 - \frac{1}{2(k+1)^t} \text{ για κάθε } 0 \leq i_l \leq k, 1 \leq l \leq t, \text{ άρα}$$

$$\mu_y(\bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A)) =$$

$$= 1 - \mu_y(\bigcup_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} (\varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A))^c) \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} \mu_y((\varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A))^c) > 1 - \sum_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} \frac{1}{2(k+1)^t} =$$

$$= \frac{1}{2}, \text{ και τότε } \mu(\bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A)) =$$

$$= \int \mu_y(\bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A)) d\nu \geq$$

$$\geq \int_{\bigcap\{s^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A_0) |\ 0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t\}} \mu_y(\bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} \varphi^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A)) d\nu(y)$$

$$\geq \frac{1}{2}\nu(\bigcap_{0 \leq i_l \leq k,\ 1 \leq l \leq t} s^{-(i_1 n_1 + ... + i_t n_t)}(A_0)) > \frac{\eta}{2} = \delta,$$

δηλαδή η $\mathcal{A}$ έχει την SS-ιδιότητα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ εργοδικό σύστημα Lebesgue. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.0.10., υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός η και σύστημα από φ-αναλλοίωτες υπο-σ-άλγεβρες $\{\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{A} \mid \xi \leq \eta\}$ τέτοιο ώστε:

i) $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) \in \{0, 1\}\}$,

ii) για κάθε $\xi < \eta$, $\mathcal{A}_{\xi+1}$ είναι συμπαγής επέκταση της $\mathcal{A}_\xi$ με $\mathcal{A}_{\xi+1} \supsetneq \mathcal{A}_\xi$,

iii) αν $\xi \leq \eta$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός τότε $\bigcup_{\xi' < \xi} \mathcal{A}_{\xi'}$ παράγει την $\mathcal{A}_\xi$, και

iv) είτε $\mathcal{A}_\eta = \mathcal{A}$ είτε η $\mathcal{A}$ έιναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση της $\mathcal{A}_\eta$.

Το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}_0, \mu, \varphi)$ προφανώς έχει την SS-ιδιότητα. Έστω $0 < \xi \leq \eta$. Υποθέτουμε ότι τα συστήματα $(X, \mathcal{A}_\gamma, \mu, \varphi)$ για $\gamma < \xi$ έχουν την SS-ιδιότητα. Θα δείξουμε ότι και το σύστημα $(X, \mathcal{A}_\xi, \mu, \varphi)$ έχει την SS-ιδιότητα. Έστω $\xi = \alpha + 1$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η $\mathcal{A}_\xi$ είναι συμπαγής επέκταση της $\mathcal{A}_\alpha$, άρα από Θεώρημα 9.2.3. το σύστημα $(X, \mathcal{A}_\xi, \mu, \varphi)$ έχει την SS-ιδιότητα. Αν ξ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.2.4., το σύστημα $(X, \mathcal{A}_\xi, \mu, \varphi)$ έχει την SS-ιδιότητα.

Σύμφωνα με το *iv)* αν $\mathcal{A}_\eta = \mathcal{A}$, τότε το σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ έχει την SS-ιδιότητα, άρα και την WS-ιδιότητα. Αλλιώς, η $\mathcal{A}$ έιναι σχετικά ασθενώς mixing επέκταση της $\mathcal{A}_\eta$ και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 9.2.2. το σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ έχει την WS-ιδιότητα. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.0.1. Αν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δεν είναι εργοδικό, θεωρώντας την διάσπασή του μέτρου μ σε $\{\mu_y \mid y \in Y\}$ στην σ-άλγεβρα των φ-αναλλοίωτων συνόλων (Θεώρημα 7.1.10.), από Θεωρήματα 7.1.13. και 9.2.1. έχουμε ότι $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$, για $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$ και $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_y(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) > 0.$$

Επιλέγουμε $B \subseteq Y$ και $\delta > 0$ ώστε $\nu(B) > 0$ με

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_y(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) X_B(y) > \delta.$$

Τότε από Λήμμα Fatou έχουμε:

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) = \liminf_n \int \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_y(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) d\nu(y) \geq$$

$$\geq \int_B \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_y(\bigcap_{l=0}^{m} \varphi^{-lk}(A)) d\nu(y) \geq \delta\nu(B) > 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 10

Θεώρημα Szemerédi

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο δίνουμε μια εργοδική απόδειξη του θεωρήματος του Szemerédi ως συνέπεια του θεωρήματος του Furstenberg (Θεώρημα III).

Θεώρημα I. (Szemerédi,1975 [27]) Έστω $E \subseteq \mathbb{Z}$ με $d^*(E) > 0$, τότε το E περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους.

Θα δωθούν τέσσερεις ισοδύναμες εκφράσεις του Θεωρήματος Szemerédi (Θεωρήματα II, III, IV και V). Η απόδειξη τις ισοδυναμίας αυτών των θεωρημάτων δίνει αυτομάτως την απόδειξη του Θεωρήματος Szemerédi, δοθέντος του θεωρήματος του Furstenberg.

Θεώρημα II. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και k θετικό ακέραιο, υπάρχει φυσικός αριθμός $n \equiv n(\varepsilon, k)$ τέτοιος ώστε αν $E \subseteq [a, b] \cap \mathbb{Z}$, όπου $b - a > n$, και $|E| \geq \varepsilon(b - a)$, τότε το E περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.

Θεώρημα III. (Furstenberg,1977 [14]) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ ένα σύστημα Lebesgue και σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Τότε, για κάθε θετικό ακέραιο k, υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $\mu(\bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jn}(A)) > 0$.

Θεώρημα IV. (Furstenberg,1977 [14]) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ δυναμικό σύστημα και σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Τότε, για κάθε θετικό ακέραιο k, υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $\mu(\bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jn}(A)) > 0$.

Θεώρημα V. Έστω χώρος μέτρου πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\varepsilon > 0$ και k θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n_1 (\equiv n(\frac{\varepsilon}{2}, k)$ του Θεωρήματος II) ώστε αν $B_l \in \mathcal{A}$, $\mu(B_l) \geq \varepsilon$ για $l = 1, ..., n_1$ τότε υπάρχει αριθμητική πρόοδος $\{a + mb\}_{m=0}^{k-1}$ μήκους k στο σύνολο $[1, ..., n_1]$ για την οποία ισχύει $\mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a+mb}) \geq \varepsilon / 2n_1^2$.

Παρατήρηση 10.0.1. Αν ισχύει ότι κάθε υποσύνολο των φυσικών αριθμών με άνω θετική πυκνότητα περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους, τότε έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ότι υπάρχει $N \equiv N(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $m > N$ και $A \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ ικανοποιεί $|A| > m\varepsilon$, τότε το A περιέχει μια αριθμητική πρόοδο μήκους k. Πράγματι, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $m_n > n$ και $A_{m_n} \subseteq \{1, 2, \dots, m_n\}$ με $|A_{m_n}| > m_n\varepsilon$ ώστε το A_{m_n} να μην περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k, τότε, για το $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{m_n}$ για το οποίο ισχύει $\overline{d}(A) > \varepsilon$, θα έχουμε από το προηγούμενο αποτέλεσμα ότι περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k, η οποία θα περιέχεται σε κάποιο $A_{m_{n_0}}$, άτοπο.

Μπορούμε λοιπόν, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση να διατυπώσουμε το Θεώρημα Szemerédi με μια ασθενέστερη έννοια πυκνότητας, αυτής της άνω θετικής πυκνότητας Banach (όπως έχουμε ήδη κάνει στο Θεώρημα I. Το ότι η άνω θετική πυνότητα Banach είναι έννοια ασθενέστερη φαίνεται από το γεγονός ότι υπάρχουν σύνολα $S \subseteq \mathbb{Z}$ με $d^*(S) > 0 = \overline{d}(S)$, όπως για παράδειγμα το σύνολο $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n^3, n^3 + n]$, για το οποίο ισχύει $d^*(S) = 1$ και $\overline{d}(S) = 0$.). Όλες οι μέχρι τώρα προτάσεις που έχουμε διατυπώσει και αποδείξει (για λόγους ευκολίας) χρησημοποιώντας την άνω θετική πυκνότητα, μπορούν να διατυπωθούν και να αποδειχθούν εντελώς ανάλογα με την ασθενέστερη έννοια της άνω θετικής πυκνότητας Banach.

Πρόταση 10.0.2. Τα Θεωρήματα I ,II ,III, IV και V είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. *IV* $\Rightarrow$ *III*) Άμεση.

III $\Rightarrow$ *I*) Έστω $E \subseteq \mathbb{Z}$ με $d^*(E) > 0$ και $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ με $\varphi(X_A)(n) = X_A(n+1)$ για $A \subseteq \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}$. Έστω $X = \overline{\{\varphi^n(X_E) \mid n \in \mathbb{Z}\}}$ η κλειστή θήκη του $\{\varphi^n(X_E) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ στο $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ με την καρτεσιανή τοπολογία. Έτσι ο X είναι συμπαγής χώρος με την σχετική τοπολογία (Θεώρημα 2.4.25.). Θεωρούμε τον περιορισμό της φ στο X. Είναι άμεσο ότι $\varphi(X) = X$ και ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και ομοιομορφισμός. Θέτουμε $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$. Αν $A := \{x \in X \mid x(0) = 1\} \in \mathcal{A}$, παρατηρούμε ότι

$$\{a + jb\}_{j=0}^{k-1} \subseteq E \text{ αν και μόνο αν } X_E \in \bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-(a+jb)}(A).$$

Πράγματι, $X_E \in \bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-(a+jb)}(A)$ αν και μόνο αν $X_E \in \varphi^{-(a+jb)}(A)$ για κάθε $j = 0, ..., k-1$, δηλαδή $\varphi^{a+jb}(X_E) \in A$ για κάθε $j = 0, ..., k-1$, ισοδύναμα, $\varphi^{a+jb}X_E(0) = 1$ για κάθε $j = 0, ..., k-1$, δηλαδή $X_E(a + jb) = 1$ για κάθε $j = 0, ..., k-1$ άρα ισοδύναμα με $\{a+jb\}_{j=0}^{k-1} \subseteq E$. Για να δείξουμε λοιπόν ότι το

E περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k, αρκεί να δείξουμε ότι για κάποιο $b \neq 0$ ισχύει $\bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jb}(A) \neq \emptyset$ αφού τότε, λόγω του ότι το σύνολο $\bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jb}(A)$ είναι ανοικτό στο X και το σύνολο $\{\varphi^n(X_E) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο X, θα υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$ ώστε $\varphi^a(X_E) \in \bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jb}(A)$ και θα έχουμε το συμπέρασμα. Κατασκευάζουμε ένα κανονικό μέτρο πιθανότητας μ στον χώρο X το οποίο ικανοποιεί: $\mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) > 0$.

Έστω ακολουθία διαστημάτων $\{[a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ με a_n, $b_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $b_n - a_n \to \infty$, καθώς $n \to \infty$ και

$$\lim_n \frac{|E \cap [a_n, b_n)|}{b_n - a_n} = d^*(E) > 0.$$

Θέτουμε

$$\mu_n = \frac{1}{b_n - a_n} \sum_{j=a_n}^{b_n - 1} \delta_{\varphi^j(X_E)},\ n \in \mathbb{N} \quad (\text{όπου } \delta_x \text{ το μέτρο Dirac στο } x).$$

Κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας στον X και επειδή για τυχόν $B \in \mathcal{A}$ ισχύει $\varphi^j(X_E) \in \varphi^{-1}(B)$ αν και μόνο αν $\varphi^{j+1}(X_E) \in B$, έχουμε $\delta_{\varphi^j(X_E)}(\varphi^{-1}(B)) = = \delta_{\varphi^{j+1}(X_E)}(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{A}$, άρα για κάθε $B \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι

$$\mu_n(\varphi^{-1}(B)) - \mu_n(B) = \frac{1}{b_n - a_n}\Big(\sum_{j=a_n}^{b_n-1} \delta_{\varphi^{j+1}(X_E)} - \sum_{j=a_n}^{b_n-1} \delta_{\varphi^j(X_E)}\Big)(B) =$$

$$= \frac{1}{b_n - a_n}(\delta_{\varphi^{b_n}(X_E)} - \delta_{\varphi^{a_n}(X_E)})(B).$$

Ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος άρα ο $\mathcal{C}(X)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach από Πρόταση 2.4.28., και τότε από Πόρισμα 2.4.35. έχουμε ότι ο $B_{\mathcal{C}(X)^*}$ είναι συμπαγής, μετρικοποιήσιμος χώρος. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.23. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\mathcal{C}(X)^*}$ (αφού $\|\mu_n\| = |\mu_n|(X) = 1$, όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα της ολικής κύμανσης του $\mathcal{M}(X)$), και άρα θα υπάρχει υπακολουθία $(\mu_{l_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w^*-συγκλίνουσα σε ένα κανονικό μέτρο πιθανότητας μ για το οποίο ισχύει $\mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = d^*(E) > 0$.

Πράγματι, για $B \in \mathcal{A}$ ισχύει, $|\mu_{l_n}(\varphi^{-1}(B)) - \mu_{l_n}(B)| =$

$$= \frac{1}{b_{l_n} - a_{l_n}} |\delta_{\varphi^{b_{l_n}}(X_E)}(B) - \delta_{\varphi^{a_{l_n}}(X_E)}(B)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{b_{l_n} - a_{l_n}}(\delta_{\varphi^{b_{l_n}}(X_E)}(B) + \delta_{\varphi^{a_{l_n}}(X_E)}(B)) \leq \frac{2}{b_{l_n} - a_{l_n}} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty,$$

$$\text{άρα} \quad \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B). \quad \text{Επίσης,} \ \mu(A) = \lim_n \mu_{l_n}(A) =$$

$$= \lim_n \frac{1}{b_{l_n} - a_{l_n}} \sum_{j=a_{l_n}}^{b_{l_n}-1} \delta_{\varphi^j(X_E)}(A) = \lim_n \frac{1}{b_{l_n} - a_{l_n}} \sum_{j=a_{l_n}}^{b_{l_n}-1} X_E(j) =$$

$$= \lim_n \frac{|E \cap [a_{l_n}, b_{l_n})|}{b_{l_n} - a_{l_n}} = d^*(E) > 0, \ \text{αφού} \ \varphi^j(X_E) \in A \ \text{αν και μόνο αν} \ j \in E.$$

Το σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, \varphi)$ είναι κανονικό, άρα από Θεώρημα 7.1.7., είναι σύστημα Lebesgue. Από Θεώρημα III έχουμε ότι $\mu(\bigcap_{j=0}^{k-1} \varphi^{-jb}) > 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο b, άρα το ζητούμενο.

$I \Rightarrow II$) Έστω προς άτοπο ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ και k θετικός ακέραιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $E_n \subseteq [a_n, b_n] \cap \mathbb{Z}$, $b_n - a_n > n$, $|E_n| > \varepsilon(b_n - a_n)$ και το E_n να μην περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.
Έστω $l_1 = 1$, $a'_1 = a_1$ και $b'_1 = b_1$. Θέτουμε για $n \in \mathbb{N}^*$ $l_{n+1} = b_{l_n} - a_{l_n}$ και

$$a'_{n+1} = 2b'_n + b_{l_{n+1}} - a_{l_{n+1}} - a_1 + 1, \quad b'_{n+1} = a'_{n+1} + b_{l_{n+1}} - a_{l_{n+1}}.$$

Τα σύνολα $E'_n = [a'_n, b'_n]$ είναι ξένα, και από πριν έχουμε $d^*(E'_n) \geq \varepsilon$. Θεωρούμε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n$ και έχουμε $d^*(E) \geq \varepsilon > 0$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $x_1, ..., x_k \in E$ όροι αριθμητικής προόδου με βήμα b (μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητος ότι $b > 0$). Τα $x_1, ..., x_k$ από υπόθεση δεν μπορούν να ανήκουν σε ένα E'_n, άρα θα υπάρχει $1 \leq i \leq k-2$ ώστε $x_i \in E'_{n_1}$ και $x_{i+1} \in E'_{n_2}$ με $n_1 < n_2$. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
i) $X_{i+2} \in E'_{n_3}$, $n_1 < n_2 = n_3$, ή
ii) $X_{i+2} \in E'_{n_3}$, $n_1 < n_2 < n_3$.
Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται γιατί θα είχαμε $b'_{n_2} - a'_{n_2} < x_{i+1} - x_i = b = = x_{i+2} - x_{i+1} < b'_{n_2} - a'_{n_2}$ που είναι άτοπο. Ανάλογα απορρίπτεται και η δεύτερη περίπτωση, καθώς θα ήταν $b'_{n_2} - a_1 > x_{i+1} - x_i = b = x_{i+2} - x_{i+1} \geq a'_{n_3} - b'_{n_2} > > b_{l_{n_3-1}} - a_{l_{n_3-1}} + b'_{n_3-1} - a_1 > b'_{n_2} - a_1$ άτοπο.

$II \Rightarrow V$) Έστω $x \in X$. Ορίζουμε $E(x) = \{l \in \mathbb{N} \mid \ 1 \leq l \leq n_1, \ x \in B_l\}$.

$$\text{Από υπόθεση έχουμε} \quad \int |E(x)| d\mu = \int \sum_{l=1}^{n_1} X_{B_l}(x) d\mu = \sum_{l=1}^{n_1} \mu(B_l) \geq n_1 \varepsilon,$$

άρα

$$n_1 \varepsilon \leq \int |E(x)| d\mu = \int_{\{|E(x)| \geq \ \varepsilon n_1/2\}} |E(x)| d\mu + \int_{\{|E(x)| < \ \varepsilon n_1/2\}} |E(x)| d\mu \leq$$

$$\leq n_1\mu(\{|E(x)| \geq \varepsilon n_1/2\}) + \frac{\varepsilon n_1}{2}, \text{ δηλαδή } \mu(\{|E(x)| \geq \varepsilon n_1/2\}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, βρίσκουμε $\{\alpha(x) + mb(x)\}_{m=0}^{k-1}$ αριθμητική πρόοδο μήκους k στο $E(x)$. Τότε $x \in \bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a(x)+mb(x)}$. Για τα $a(x), b(x)$ έχουμε n_1^2 επιλογές, και αν $A = \{x \in X \mid |E(x)| \geq \varepsilon n_1/2\}$, από πριν έχουμε $\mu(A) \geq \varepsilon/2$ και $A = \bigcup_{i=1}^{n_1^2} \bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a_i+mb_i}$.

Ισχυρισμός.Υπάρχει ζεύγος $(a_i, b_i) \equiv (a, b)$ ώστε $\mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a+mb}) \geq \varepsilon/2n_1^2$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν δεν υπήρχε τέτοιο ζεύγος, για κάθε (a_i, b_i), $i = 1, ..., n_1^2$ θα είχαμε $\mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a+mb}) < \varepsilon/2n_1^2$. Τότε όμως

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n_1^2} \mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a_i+mb_i}) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ άτοπο αφού } \mu(A) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα υπάρχει το ζητούμενο ζεύγος, πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό και το ζητούμενο.

$V \Rightarrow IV$) Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και k θετικός φυσικός αριθμός. Αν $\varepsilon = \mu(A)$ και $n_1 \equiv n(\frac{\varepsilon}{2}, k)$, για $B_l = \varphi^{-l}(A)$, $l = 1, ..., n_1$ έχουμε $B_l \in \mathcal{A}$ και $\mu(B_l) = \mu(A) \geq \varepsilon$ για $l = 1, ..., n_1$. Από υπόθεση υπάρχει αριθμητική πρόοδος

$$\{a + mb\}_{m=0}^{k-1}, \ b \geq 1 \text{ τέτοια ώστε } 0 < \frac{\varepsilon}{2n_1^2} \leq \mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} B_{a+mb}) =$$

$$= \mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} \varphi^{-a-mb}(A)) = \mu(\varphi^{-a}(\bigcap_{m=0}^{k-1} \varphi^{-mb}(A))) = \mu(\bigcap_{m=0}^{k-1} \varphi^{-mb}(A)),$$

αφού η φ διατηρεί το μέτρο. Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] V.Bergelson, Weakly mixing PET, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 337–349.

[2] J.R.Brown, *Ergodic Theory and Topological Dynamics*, Academic Press, New York, 1976.

[3] T.Carlson, Some unifying principles in Ramsey theory, *Discrete Math.* **68** (1988), 117–169.

[4] W.W.Comfort and S.Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[5] N.Dunford and J.T.Schwartz, *Linear Operators*, Part I. Wiley (Interscience), New York, 1958.

[6] R.Ellis, *Lectures on topological dynamics*, Benjamin, New York, 1969.

[7] P.Erdös and P.Turán, On some sequences of integers, *J. London Math. Soc.* **11** (1936), 261–264.

[8] V.Farmaki, Systems of Ramsey families, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Montena*, *L* (2002), 363–379.

[9] V.Farmaki, Ramsey theory for words over an infinite alphabet, to appear.

[10] V.Farmaki and S.Negrepontis, Block Combinatorics, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 2759–2779.

[11] V.Farmaki and S.Negrepontis, Schreier sets in Ramsey theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[12] H.Furstenberg and Y.Katznelson, Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory, *Israel J. Math.* **68** (1989), 257–270.

[13] H.Furstenberg, Y.Katznelson and D.Ornstein, The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* (1982), 527–552.

[14] H.Furstenberg, Ergodic behavior of diagonal measures and a theory of Szemerédi on arithmetic progressions, *j. d' Analyse Math.* **31**, (1977), 204–256.

[15] H.Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, 1981.

[16] A.W.Hales and R.I.Jewett, Regularity and Positional Games, *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), 222–229.

[17] P.R.Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, New York, 1950.

[18] N.Hindman, Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$, *J. Combinatorial Theory*, *Ser. A* **17** (1974), 1–11.

[19] R.McCutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[20] K.Milliken, Ramsey's theorem with sums or unions, *J. Combinatorial Theory*, *Ser. A* **18** (1975), 276–290.

[21] K.Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

[22] F.P.Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* **30** (2), (1930), 264–286.

[23] V.A.Rohlin, Selected topics from the metric theory of dynamical systems, *Amer. Math. Soc. Transl.* **2**, **49** (1966) 171–209.

[24] K.Roth, Sur quelques ensembles d'entiers, *C.R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), 338–390.

[25] Schur, Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m (modp)$. *Jahresbericht der Deutschen Math. Ver.* **25** (1916), 114–117.

[26] E.Szemerédi, On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 89–104.

[27] E.Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 199–245.

[28] A.Taylor, A canonical partition relation for finite subsets of ω, *J. Combinatorial Theory*, *Ser. A* **21** (1976), 137–146.

[29] B.L.van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Arch. Wisk.* **15** (1927), 212–216.

[30] P.Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[31] Δ.Α.Βάρσος, Δ.Ι.Δεριζιώτης, Μ.Π. Μαλιάκας, Σ.Γ.Παπασταυρίδης, Ε.Ράπτης και Ο.Ταλέλλη, *Μια εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Σοφία, Αθήνα, 2003.

[32] Α.Γιαννόπουλος, *Συναρτησιακή Ανάλυση* (Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος), Αθήνα, 2007.

[33] Α.Κατάβολος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, 2006.

[34] Α.Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών* (Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος), Αθήνα, 2007.

[35] Γ.Κουμουλής και Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Συμμετρία, Αθήνα, 1991.

[36] Γ.Ν.Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Νεφέλη, Αθήνα, 1993.

[37] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας και Β.Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Συμμετρία, Αθήνα, 1997.

[38] Κ.Α.Σταθακόπουλος, *Πραγματική Ανάλυση*, Αίθρα, Αθήνα, 1989.

[39] Β.Φαρμάκη, *Θεωρία Ramsey* (Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος), Αθήνα, 2007.